Images directes III: F-isocristaux surconvergents

Jean-Yves Etesse

Images directes III : F-isocristaux surconvergents

Jean-Yves ETESSE [1]

Sommaire

[1](CNRS - Institut de Mathématique, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu - 35042 RENNES Cedex France)
E-mail : Jean-Yves.Etesse@univ-rennes1.fr

Résumé

Cet article est le troisième d'une série de trois articles consacrés aux images directes d'isocristaux : ici nous considérons des isocristaux surconvergents avec structure de Frobenius.

Pour un morphisme propre et lisse relevable nous établissons la surconvergence des images directes, grâce à des relèvements du Frobenius et au premier article. Ce résultat répond partiellement à une conjecture de Berthelot sur la surconvergence des images directes des F-isocristaux surconvergents par un morphisme propre et lisse.

Abstract

This article is the third one of a series of three articles devoted to direct images of isocrystals : here we consider overconvergent isocrystals with Frobenius structure.

For a liftable proper smooth morphism we establish the overconvergence of direct images, owing to the first article and the existence of lifts of Frobenius. This result partially answers a conjecture of Berthelot on the overconvergence of direct images of overconvergent F-isocrystals under a proper smooth morphism.

2000 Mathematics Subject Classification : 13B35, 13B40, 13J10, 14D15, 14F20, 14F30, 14G22.

Mots clés : algèbres de Monsky-Washnitzer, schémas formels, espaces rigides analytiques, F- isocristaux surconvergents, cohomologie rigide, images directes.

Key words : Monsky-Washnitzer algebras, formal schemes, rigid analytic spaces, overconvergent F- isocrystals, rigid cohomology, direct images.

Introduction

Cet article est le troisième d'une série de trois articles consacrés aux images directes d'isocristaux. Ici on étudie les images directes des F-isocristaux dans le cadre «surconvergent». Par rapport à [Et 7] ([Et 5, chap II]) on ajoute donc une structure de Frobenius : tout le problème est d'obtenir de «bons» relèvements du Frobenius.

Soient $\mathcal{V}$ un anneau de valuation discrète complet, de corps résiduel $k = \mathcal{V}/\mathfrak{m}$ de caractéristique $p > 0$, de corps des fractions K de caractéristique 0 et d'indice de ramification e, et S un k-schéma affine et lisse. Sur la base S, la question du relèvement du Frobenius est résolue par le diagramme (1.2.4), qu'il s'agit ensuite de «tirer en haut» par le morphisme propre et lisse $f : X \to S$.

Dans le cas où f est relevable, on arrive à effectuer en parrallèle des relèvements du Frobenius et des bons choix de compactifications. D'où le théorème de surconvergence des images directes dans le cas relevable [théo (2.1)] : le point clé est de montrer que le Frobenius, sur les images directes surconvergentes, est un isomorphisme ; par le théorème de changement de base on est ramené à la même propriété dans le cas convergent vue dans [Et 8, (3.3.1)] ou [Et 5, chap III, (3.3.1)]. Dans le cas où f est projectif lisse relevable, ou X intersection complète relative dans des espaces projectifs sur S, abordés au §3, ou fini étale au §4, on construit comme dans [Et 7, §3] ou [Et 5, chap II, §3] des foncteurs $R^i f_{rig*}$ sur la catégorie des F-isocristaux surconvergents [théorèmes (3.1) et (4.1)].

Lorsque f est propre et lisse et que de plus

(i) ou bien f est génériquement projectif relevable,

(ii) ou bien f est génériquement projectif et X est intersection complète relative dans des espaces projectifs sur S,

on utilise les résultats de [Et 8] : on est ainsi amené à supposer k parfait, $e \leqslant p - 1$ et à se restreindre à des F-isocristaux plats. Grâce aux propriétés de descente étale des F-isocristaux surconvergents de [Et 4] et à la pleine fidélité du foncteur d'oubli de la catégorie surconvergente vers la catégorie convergente, établie par Kedlaya [Ked 2], on prouve encore la surconvergence des images directes [théo (3.2)].

Dans le §5, où f est supposé seulement plongeable, on procède différemment : comme il n'y a plus de relèvements globaux du Frobenius comme précédemment on utilise la fonctorialité des images directes pour construire un morphisme de Frobenius ; il reste alors à prouver que c'est un isomorphisme. Par un résultat de Berthelot il suffit de voir que tel est le cas dans la catégorie convergente : le théorème de changement de base et un résultat de Bosch-Güntzer-Remmert [B-G-R] nous ramène à le vérifier aux points fermés de S, pour lesquels l'assertion est connue [Et 8, (3.3.1.18)] ou [Et 5, chap III, (3.3.1.18)]. Pour f plongeable on a ainsi des foncteurs images directes sur la catégorie des F-isocristaux surconvergents [théo (5.2)].

1. Frobenius

1.1. On fixe dans ce paragraphe 1 un entier $a \in \mathbb{N}^*$; on pose $q = p^a$. Pour tout k-schéma S on notera F_S le Frobenius de S induit par la puissance q sur le faisceau $\mathcal{O}_S$.

On fixe un relèvement $\sigma : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ de la puissance q sur k à la manière de [Et 4, I, 1.1].

Si S est lisse sur k et $e \leqslant p-1$, on notera $F^a\text{-Isoc}^\dagger(S/K)_{\text{plat}}$ la sous-catégorie pleine de $F^a\text{-Isoc}^\dagger(S/K)$ formé des objets dont l'image par le foncteur d'oubli

$$F^a\text{-Isoc}^\dagger(S/K) \longrightarrow F^a\text{-Isoc}(S/K)$$

est dans $F^a\text{-Isoc}(S/K)_{\text{plat}}$ (cf [Et 8, 3.1] ou [Et 5, chap III, 3.1]).

1.2. Soit S un k-schéma affine et lisse. En utilisant les notations du [Et 6, théo (3.1.3) (3)] ou [Et 5, chap I, théo (3.4)(3)] il existe une $\mathcal{V}$-algèbre lisse A telle que $Spec\ A$ relève S et un $\mathcal{V}$-morphisme fini ψ relevant le Frobenius F_S, s'insérant dans un diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$(1.2.1) \qquad \begin{tikzcd} Spec\ B_T \arrow[r] \arrow[d, "\psi_T"'] & Spec\ B \arrow[r, hook, "j_{Z'}"] \arrow[d, "\psi"] & Z' \arrow[d, "\overline{\psi}"] \\ Spec\ A_T \arrow[r] & Spec\ A \arrow[r, hook, "j_Z"] & Z \end{tikzcd}$$

où les j sont des immersions ouvertes, $\overline{\psi}$ est fini, ψ_T est fini et plat, et Z est un $\mathcal{V}$-schéma propre, normal.

Soit $\hat{A}$ le séparé complété $\mathfrak{m}$-adique de A : c'est aussi le séparé complété de A_T, et on a un isomorphisme [Et 6, théo (3.1.3) (2) (i)] ou [Et 5, chap I, théo (3.4)(2)(i)]

$$B_T \otimes_{A_T} \hat{A} \simeq \hat{B} \simeq \hat{A}$$

tel que dans le diagramme commutatif à carrés cartésiens

(1.2.2)
$$\begin{tikzcd}
Spec\ \hat{A} \arrow[r, "\sim"] \arrow[rr, bend left, "\rho_B"] \arrow[dr, "\varphi"'] & Spec\ \hat{B}_T \arrow[r] \arrow[d, "\hat{\psi}_T"] & Spec\ B \arrow[r, hook, "j_{Z'}"] \arrow[d, "\psi"] & Z' \arrow[d, "\overline{\psi}"] \\
 & Spec\ \hat{A}_T = Spec\hat{A} \arrow[r, "\rho_A"'] & Spec\ A \arrow[r, hook, "j_Z"'] & Z
\end{tikzcd}$$

φ est un relèvement de F_S.

Le morphisme diagonal $Spec\ \hat{A} \longrightarrow Spec\ \hat{A} \times_{\mathcal{V}} Spec\ \hat{A}$ est une immersion fermée, donc $Spec\ \hat{A}$ est isomorphe à son image schématique $\hat{\Delta}$ par ce morphisme. Considérons l'image schématique de $\hat{\Delta}$ par le morphisme composé

$$Spec\ \hat{A}\ \times_{\mathcal{V}}\ Spec\ \hat{A} \underset{\rho=\rho_A \times \rho_B}{\twoheadrightarrow} Spec\ A \times_{\mathcal{V}}\ Spec\ B \underset{j_{\mathcal{Z}} \times j_{\mathcal{Z}'} = j}{\hookrightarrow} \mathcal{Z} \times_{\mathcal{V}} \mathcal{Z}'\ ;$$

notons Δ (resp. $\mathcal{Z}''$) l'image schématique de $\hat{\Delta}$ (resp. de Δ) par $\rho_A \times \rho_B$ (resp. par $j_Z \times j_{Z'}$). L'immersion ouverte j induit une immersion ouverte $j''_Z : \Delta \hookrightarrow Z''$ [EGA I, (5.4.4)].

Montrons que $\rho(\hat{\Delta}) = \Delta$. Quitte à décomposer la $\mathcal{V}$-algèbre lisse (donc normale) A en somme de ses composantes connexes, on peut supposer A intègre, donc intégralement clos : ainsi $\hat{A}$ est intégralement clos [Et 6, prop (1.6) (4) (iv)] ou [Et 5, chap I, prop (1.6) (4) (iv)]. Soit I l'idéal de $\hat{A} \otimes_{\mathcal{V}} \hat{A}$ définissant $\hat{\Delta} = Spec(\hat{A} \otimes_{\mathcal{V}} \hat{A}/I)$: comme $\hat{A}$ est intègre, I est un idéal premier. L'image de A par ρ est donc l'ensemble des idéaux premiers de $A \otimes_{\mathcal{V}} B$ contenant $\rho(I)$: c'est donc $Spec(A \otimes_{\mathcal{V}} B/\tilde{\rho}^{-1}(I))$ où $\tilde{\rho} : A \otimes_{\mathcal{V}} B \to \hat{A} \otimes_{\mathcal{V}} \hat{A}$ induit ρ ; comme c'est déjà un sous-schéma fermé de $Spec\ A \times_{\mathcal{V}} Spec\ B$, il est égal à Δ.

En remarquant que $\rho_n = \rho$ mod $\mathfrak{m}^{n+1}$ est l'identité, ρ_n induit un isomorphisme

$$(Spec\ \hat{A} \bmod \mathfrak{m}^{n+1}) \xrightarrow{\sim} (\hat{\Delta} \bmod \mathfrak{m}^{n+1}) \underset{\rho_n}{\xrightarrow{\sim}} (\Delta \bmod \mathfrak{m}^{n+1}).$$

Notons alors $\mathcal{S}, \mathcal{Z}, \mathcal{Z}', \mathcal{Z}''$ les schémas formels associés respectivement à $Spec\ \hat{A},\ Z,\ Z',\ Z''$. Ce qui précède fournit un diagramme commutatif à carré cartésien

(1.2.3)
$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{Z} & \\
 & \mathcal{Z}'' \arrow[u, "v_{\mathcal{Z}}"'] \arrow[r, hook] \arrow[d, "v_{\mathcal{Z}'}"] & \mathcal{Z} \times_{\mathcal{V}} \mathcal{Z}' \arrow[ul, "\text{proj}"'] \arrow[dl, "\text{proj}"] \\
\mathcal{S} \arrow[uur, hook, "j_{\mathcal{Z}}"] \arrow[ur, "j_{\mathcal{Z}''}"'] \arrow[r, hook, "j_{\mathcal{Z}'}"'] \arrow[d, "F_{\mathcal{S}}:=\hat{\varphi}"'] & \mathcal{Z}' \arrow[d, "\hat{\hat{\psi}}=:F_{\mathcal{Z}'}"] & \\
\mathcal{S} \arrow[r, hook, "j_{\mathcal{Z}}"] & \mathcal{Z} &
\end{tikzcd}$$

où $\mathcal{Z}$ est propre sur $\mathcal{V}$ et normal et $\hat{\hat{\psi}}$ est fini [Et 6, théo (3.1.3)(3)] ou [Et 5, chap I, théo (3.4) (3)] ; $F_{\mathcal{S}}$ est un relèvement fini et plat du Frobenius F_S ; $j_{\mathcal{Z}}, j_{\mathcal{Z}'}, j_{\mathcal{Z}''}$ sont des immersions ouvertes induites respectivement par $j_Z, j_{Z'}, j_{Z''}$; i est l'immersion fermée induite par l'immersion fermée $\mathcal{Z}'' \hookrightarrow \mathcal{Z} \times_{\mathcal{V}} \mathcal{Z}'$; $v_{\mathcal{Z}}, v_{\mathcal{Z}'}$ sont des morphismes propres par composition de morphismes propres.

Avec les notations de [Et 7, (2.3.1)(2)] ou [Et 5, chap II, (2.3.1) (2)] soit $V_\lambda = Spm\ A_\lambda$: il existe $\lambda_0 > 1$ tel que, pour $1 < \lambda \leqslant \lambda_0$, V_λ est lisse sur K ; notons $W'_\lambda = F^{-1}_{\mathcal{Z}'_K}(V_\lambda)$ et $W''_\lambda = v^{-1}_{\mathcal{Z}'_K}(W'_\lambda)$.

Puisque $(V_\lambda)_\lambda$ décrit un système fondamental de voisinages stricts de $\mathcal{S}_K$ dans $\mathcal{Z}_K$, alors $(W'_\lambda)_\lambda$ décrit un système fondamental de voisinages stricts de $\mathcal{S}_K$ dans $\mathcal{Z}'_K$ [Et 7, prop (2.1.2)] ou [Et 5, chap II, prop (2.1.2)]. Comme $v_{\mathcal{Z}'}$ est étale au voisinage de $\mathcal{S}$, il existe $\lambda_1 > 1$ tel que pour tout λ, $1 < \lambda \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_0$, on ait un isomorphisme $W''_\lambda \xrightarrow{\sim} W'_\lambda$ induit par $v_{\mathcal{Z}'}$ [B 3, (1.3.5)]. De même $v_{\mathcal{Z}}$ qui est étale au voisinage de $\mathcal{S}$, induit un isomorphisme entre un système fondamental de voisinages stricts de $\mathcal{S}_K$ dans $\mathcal{Z}''_K$ et un système fondamental de voisinages stricts de $\mathcal{S}_K$ dans $\mathcal{Z}_K$: par composition il existe μ, $1 < \mu \leqslant \lambda \leqslant \lambda_1$, et un morphisme fini $F_{\lambda\mu}$ rendant cartésien le carré

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{S}_K \arrow[r, hook] \arrow[d, "F_{\mathcal{S}_K}"'] & V_\mu \arrow[d, "F_{\lambda\mu}"] \\
\mathcal{S}_K \arrow[r, hook] & V_\lambda
\end{tikzcd}
\tag{1.2.4}
$$

où les flèches horizontales sont des immersions ouvertes et V_λ est lisse sur K.

2. Cas relevable

Théorème (2.1). *Soient S un k-schéma lisse et séparé et $f : X \to S$ un k-morphisme propre et lisse. On suppose qu'il existe un carré cartésien de $\mathcal{V}$-schémas formels*

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{X} \arrow[r, hook, "j_{\overline{\mathcal{X}}}"] \arrow[d, "h"'] & \overline{\mathcal{X}} \arrow[d, "\overline{h}"] \\
\mathcal{S} \arrow[r, hook, "j_{\overline{\mathcal{S}}}"'] & \overline{\mathcal{S}}
\end{tikzcd}
\quad ,
\tag{2.1.1}
$$

de réduction mod $\mathfrak{m}$ égale à

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, hook, "j_{\overline{X}}"] \arrow[d, "f"'] & \overline{X} \arrow[d, "\overline{f}"] \\
S \arrow[r, hook, "j_{\overline{S}}"'] & \overline{S}
\end{tikzcd}
\quad ,
\tag{2.1.2}
$$

où $\overline{\mathcal{S}}$ est propre sur $\mathcal{V}$, $\overline{h}$ est propre, h est propre et lisse et les j sont des immersions ouvertes.

Soit $E \in F^a$-Isoc$^\dagger(X/K)$ et $\hat{E} = \mathcal{E}$ son image dans F^a-Isoc(X/K). Alors, pour tout entier $i \geqslant 0$

(1) $E_i := R^i f_{\mathrm{rig}^*}(X/\overline{\mathcal{S}}, E) \in F^a\text{-Isoc}^\dagger(S/K)$

(2) *Soient $\hat{E}_i = j^*_{\overline{S}}(E_i), \mathcal{E}_i = R^i f_{conv^*}(X/\mathcal{S}, \mathcal{E})$ et $\phi_{E_i} : F^*_S\ E_i \to E_i$, $\phi_{\mathcal{E}_i} : F^*_S\ \mathcal{E}_i \to \mathcal{E}_i$ les isomorphismes de Frobenius. Le diagramme commutatif d'isomorphismes ci-dessous définit $\phi_{\hat{E}_i}$ et permet les identifications canoniques*

$$j_{\overline{S}}^*(\phi_{E_i}) = \phi_{\hat{E}_i} = \phi_{\mathcal{E}_i}$$

$$\begin{tikzcd}
j_{\overline{S}}^* \, F_S^* \, R^i f_{\mathrm{rig}*}(X/\overline{\mathcal{S}}, E) \arrow[r, "\sim", "j_{\overline{S}}^*(\phi_{E_i})"'] \arrow[d, "\simeq"] & j_{\overline{S}}^* \, R^i f_{\mathrm{rig}*}(X/\overline{\mathcal{S}}, E) \arrow[d, equal] \\
F_S^* \, j_{\overline{S}}^* \, R^i f_{\mathrm{rig}*}(X/\overline{\mathcal{S}}, E) \arrow[r, "\sim", "\phi_{\hat{E}_i}"'] \arrow[d, "\simeq"] & j_{\overline{S}}^* \, R^i f_{\mathrm{rig}*}(X/\overline{\mathcal{S}}, E) \arrow[d, "\simeq"] \\
F_S^* \, R^i f_{\mathrm{conv}^*}(X/\mathcal{S}, \mathcal{E}) \arrow[r, "\sim", "\phi_{\mathcal{E}_i}"'] & R^i f_{\mathrm{conv}^*}(X/\mathcal{S}, \mathcal{E}).
\end{tikzcd}$$

Démonstration. L'image inverse $F_\sigma^* \, E_i$ par Frobenius s'obtient [B 3, (2.3.7)] en appliquant le foncteur de changement de base

$$\sigma^* : \mathrm{Isoc}^\dagger(S/K) \longrightarrow \mathrm{Isoc}^\dagger(S^{(q)}/K)$$

puis le foncteur image inverse par le Frobenius $F_{S/k} : S \to S^{(q)}$.

Comme σ est fixé on notera $F_\sigma^* \, E = F_S^* \, E$. Il nous reste donc à définir l'isomorphisme de Frobenius ϕ_{E_i} de E_i.

Quitte à décomposer S en somme de ses composantes connexes il suffit de définir ϕ_{E_i} sur chacune de ces composantes connexes. Soit S_α un ouvert affine d'une composante connexe S_0 de S : comme le foncteur

$$F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(S_0/K) \longrightarrow F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(S_\alpha/K)$$

est pleinement fidèle [Et 4, théo 4], il suffit de définir ϕ_{E_i} sur S_α.

Soit $j_{s_\alpha} : S_\alpha = Spec\ A_0 \hookrightarrow S$ l'immersion ouverte et A une $\mathcal{V}$-algèbre lisse relevant A_0. D'après (1.2.3) on a un diagramme commutatif de $\mathcal{V}$-schémas formels de type fini, à carré cartésien

(2.1.3)
$$\begin{tikzcd}
 & & \overline{\mathcal{S}}_\alpha \\
 & \overline{\mathcal{S}}''_\alpha \arrow[ur, "v_{\overline{\mathcal{S}}_\alpha}"] \arrow[d, "v_{\overline{\mathcal{S}}'_\alpha}"] & \\
S_\alpha \arrow[uurr, hook, "j_{\overline{\mathcal{S}}_\alpha}"] \arrow[ur, hook, "j_{\overline{\mathcal{S}}''_\alpha}"'] \arrow[r, hook, "j_{\overline{\mathcal{S}}'_\alpha}"'] \arrow[d, "F_\alpha"'] & \overline{\mathcal{S}}'_\alpha \arrow[d, "\overline{F}_\alpha"] & \\
\mathcal{S}_\alpha \arrow[r, hook, "j_{\overline{\mathcal{S}}_\alpha}"] & \overline{\mathcal{S}}_\alpha &
\end{tikzcd}$$

où $\mathcal{S}_\alpha = Spf\hat{A}$, $\overline{\mathcal{S}}_\alpha$ est propre sur $\mathcal{V}$, $v_{\overline{\mathcal{S}}'_\alpha}$ et $v_{\overline{\mathcal{S}}_\alpha}$ sont propres, F_α est un relèvement fini et plat du Frobenius F_{S_α} de S_α, $\overline{F}_\alpha$ est fini et les j sont des immersions ouvertes. Notons $j_{\overline{\mathcal{T}}_\alpha} : \mathcal{T}_\alpha := \mathcal{S}_\alpha \times_{\mathcal{V}} \mathcal{S} \longrightarrow \overline{\mathcal{T}}_\alpha := \overline{\mathcal{S}}_\alpha \times_{\mathcal{V}} \overline{\mathcal{S}}$ l'immersion ouverte et $\overline{u}_\alpha : \overline{\mathcal{T}}_\alpha \longrightarrow \overline{\mathcal{S}}_\alpha, \overline{v}_\alpha : \overline{\mathcal{T}}_\alpha \longrightarrow \overline{\mathcal{S}}$ les projections ; soient $\overline{T}_\alpha$ (resp. T_α) la réduction de $\overline{\mathcal{T}_\alpha}$ (resp. $\mathcal{T}_\alpha$) mod $\mathfrak{m}$ et $\tilde{S}_\alpha$ l'image schématique de S_α plongé diagonalement dans $\overline{T}_\alpha$:

$$\begin{tikzcd}
S_\alpha \arrow[r, hook, "j_{\tilde{S}_\alpha}"'] & \tilde{S}_\alpha \arrow[r, hook, "i_{\overline{T}_\alpha}"] \arrow[rr, bend right, "i_{\tilde{S}_\alpha}"'] & \overline{T}_\alpha \arrow[r, hook, "i_{\overline{\mathcal{T}}_\alpha}"] & \overline{\mathcal{T}}_\alpha
\end{tikzcd}$$

$j_{\tilde{S}_\alpha}$ est une immersion ouverte et les i des immersions fermées. On a alors un diagramme commutatif à carrés verticaux cartésiens

(2.1.4)

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[rr, hook, "j_{\overline{X}}"] \arrow[d, dotted, "f"] & & \overline{X} \arrow[rr, hook, "i_{\overline{X}}"] \arrow[d, dotted, "\overline{f}"] & & \overline{\mathcal{X}} \arrow[d, "\overline{h}"] \\
 & & S \arrow[rr, hook, dotted, "j_{\overline{S}}"] & & \overline{S} \arrow[rr, hook, dotted, "i_{\overline{S}}"] & & \overline{\mathcal{S}} \\
 & X_\alpha \arrow[uur, hook, "j_{X_\alpha}"] \arrow[rr, hook] \arrow[d, dotted, "f_\alpha"] & & \overline{X} \arrow[uur, equal] \arrow[rr, hook, "i_{\overline{X}}"] \arrow[d, dotted, "\overline{f}"] & & \overline{\mathcal{X}} \arrow[uur, equal] \arrow[d, "\overline{h}"] & \\
 & S_\alpha \arrow[uur, dotted, "j_{S_\alpha}"] \arrow[rr, hook, dotted, "\overline{j}_\alpha"] & & \overline{S} \arrow[uur, dotted, "id"] \arrow[rr, hook, dotted, "i_{\overline{S}}"] & & \overline{\mathcal{S}} \arrow[uur, equal, "id"'] & \\
X_\alpha \arrow[uur, equal, "id"] \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_\alpha"'] & \tilde{X}_\alpha \arrow[r, hook] \arrow[d] & \overline{Y}_\alpha \arrow[uur] \arrow[rr, hook] \arrow[d] & & \overline{\mathcal{Y}}_\alpha \arrow[uur] \arrow[d, "\overline{h}_\alpha"] & & \\
S_\alpha \arrow[uur, dotted, "id"'] \arrow[r, hook, "j_{\tilde{S}_\alpha}"'] & \tilde{S}_\alpha \arrow[r, hook] & \overline{T}_\alpha \arrow[uur, dotted] \arrow[rr, hook] & & \overline{\mathcal{T}}_\alpha\ . \arrow[uur, "\overline{v}_\alpha"'] & &
\end{tikzcd}$$

Ainsi on a une suite d'isomorphismes

$j^*_{S_\alpha} R^i f_{\mathrm{rig}*}(X/\overline{\mathcal{S}}, E) \xrightarrow{\sim} R^i f_{\alpha\mathrm{rig}*}(X_\alpha/\overline{\mathcal{S}}, j^*_{X_\alpha} E)$ [[Et 7, théo (3.4.4)] ou [Et 5, chap II, théo(3.4.4

(2.1.5) $\simeq \overline{v}^*_{\alpha_K} R^i f_{\alpha\mathrm{rig}*}(X_\alpha/\overline{\mathcal{S}}, j^*_{X_\alpha} E)$ [B 3, (2.3.6), (2.3.2) (iv)]

$\xrightarrow{\sim} R^i f_{\alpha\mathrm{rig}*}(X_\alpha/\overline{\mathcal{T}_\alpha}, j^*_{X_\alpha} E)$ [[Et 7, théo (3.4.4)]].

On est donc ramené à construire un isomorphisme de Frobenius sur

$$R^i f_{\alpha\mathrm{rig}*}(X_\alpha/\overline{\mathcal{T}_\alpha}, j^*_{X_\alpha} E) \in \mathrm{Isoc}^\dagger(S_\alpha/K).$$

A partir du carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{T}_\alpha \arrow[r, hook, "j_{\overline{\mathcal{T}}'_\alpha}"] \arrow[d, "F_{\mathcal{T}_\alpha}:=F_\alpha\times 1"'] & \overline{\mathcal{T}}'_\alpha := \overline{\mathcal{S}}'_\alpha \times_{\mathcal{V}} \overline{\mathcal{S}} \arrow[d, "\overline{F}_\alpha\times 1=:F_{\overline{\mathcal{T}}'_\alpha}"] \\
\mathcal{T}_\alpha \arrow[r, hook, "j_{\overline{\mathcal{T}}_\alpha}"'] & \overline{\mathcal{T}}_\alpha = \overline{\mathcal{S}}_\alpha \times_{\mathcal{V}} \overline{\mathcal{S}}
\end{tikzcd} \qquad ,$$

déduit de (2.1.3), et du carré cartésien

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Y}_\alpha \arrow[r, hook] \arrow[d, "h_\alpha"'] & \overline{\mathcal{Y}_\alpha} \arrow[d, "\overline{h}_\alpha"] \\
\mathcal{T}_\alpha \arrow[r, hook, "j_{\overline{\mathcal{T}}_\alpha}"'] & \overline{\mathcal{T}}_\alpha
\end{tikzcd} \quad ,$$

où les flèches j sont des immersions ouvertes, on forme les diagrammes commutatifs à carrés cartésiens

(2.1.6)
$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & X_\alpha \arrow[rr] \arrow[dd, dotted, "f_\alpha"] & & Y_\alpha \arrow[rr, hook] \arrow[dd, dotted] & & \mathcal{Y}_\alpha \arrow[rr, hook] \arrow[dd, dotted, "h_\alpha"] & & \overline{\mathcal{Y}}_\alpha \arrow[dd, "\overline{h}_\alpha"] \\
X_\alpha^{(q/S_\alpha)} \arrow[rr] \arrow[ur] \arrow[dd, "f_\alpha^{(q)}"'] & & Y'_\alpha \arrow[rr, hook] \arrow[ur] \arrow[dd] & & \mathcal{Y}'_\alpha \arrow[rr, hook] \arrow[ur] \arrow[dd] & & \overline{\mathcal{Y}}'_\alpha \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
 & S_\alpha \arrow[rr, dotted, "i_\alpha"] & & T_\alpha \arrow[rr, hook, dotted, "i_{\mathcal{T}_\alpha}"] & & \mathcal{T}_\alpha \arrow[rr, hook, dotted, "j_{\overline{\mathcal{T}}_\alpha}"] & & \overline{\mathcal{T}}_\alpha \\
S_\alpha \arrow[rr, "i_\alpha"'] \arrow[ur, dotted, "F_{S_\alpha}"] & & T_\alpha \arrow[rr, hook, "i_{\mathcal{T}_\alpha}"'] \arrow[ur, dotted, "F_{S_\alpha}\times 1"'] & & \mathcal{T}_\alpha \arrow[rr, hook, "j_{\overline{\mathcal{T}}'_\alpha}"'] \arrow[ur, dotted, "F_{\mathcal{T}_\alpha}"'] & & \overline{\mathcal{T}}'_\alpha \arrow[ur, "F_{\overline{\mathcal{T}}'_\alpha}"'] &
\end{tikzcd}$$

(où i_α et $i_{\mathcal{T}_\alpha}$ sont des immersions fermées), et

(2.1.7)
$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & X_\alpha \arrow[rr, hook, "j_{\tilde{X}_\alpha}"] \arrow[dd, dotted, "f_\alpha"] & & \tilde{X}_\alpha \arrow[rr] \arrow[dd, dotted, "\tilde{f}_\alpha"] & & \overline{\mathcal{Y}}_\alpha \arrow[dd, "\overline{h}_\alpha"] \\
X_\alpha^{(q/S_\alpha)} \arrow[rr, hook] \arrow[ur, "\pi_{X_\alpha}"] \arrow[dd, "f_\alpha^{(q)}"'] & & \tilde{X}'_\alpha \arrow[rr] \arrow[ur] \arrow[dd, "\tilde{f}'_\alpha"'] & & \overline{\mathcal{Y}}'_\alpha \arrow[ur] \arrow[dd, "\overline{h}'_\alpha"] & \\
 & S_\alpha \arrow[rr, hook, dotted, "j_{\tilde{S}_\alpha}"] & & \tilde{S}'_\alpha \arrow[rr, hook, dotted, "i_{\tilde{S}_\alpha}"] & & \overline{\mathcal{T}}'_\alpha \\
S_\alpha \arrow[rr, hook, "j_{\tilde{S}'_\alpha}"'] \arrow[ur, dotted, "F_{S_\alpha}"] & & \tilde{S}'_\alpha \arrow[rr, hook, "i_{\tilde{S}'_\alpha}"'] \arrow[ur, dotted, "\tilde{F}_\alpha"'] & & \overline{\mathcal{T}}'_\alpha \arrow[ur, "F_{\overline{\mathcal{T}}'_\alpha}"'] &
\end{tikzcd} \; .$$

D'après [Et 7, théo (3.4.4)] ou [Et 5, chap II, théo (3.4.4)] on a un isomorphisme

(2.1.8) $$F^*_{S_\alpha} R^i f_{\alpha\ \mathrm{rig}^*}(X_\alpha/\overline{\mathcal{T}_\alpha}, j^*_{X_\alpha}E) \tilde{\to} R^i f^{(q)}_{\alpha\ \mathrm{rig}^*}(X_\alpha^{(q/S_\alpha)}/\overline{\mathcal{T}}'_\alpha, \pi^*_{X_\alpha}\ j^*_{X_\alpha}E).$$

Notons $v_{\overline{\mathcal{T}}_\alpha} := v_{\overline{\mathcal{S}}_\alpha} \times 1_{\overline{\mathcal{S}}} : \overline{\mathcal{T}}''_\alpha = \overline{\mathcal{S}}''_\alpha \times_{\mathcal{V}} \overline{\mathcal{S}} \to \overline{\mathcal{T}}_\alpha = \overline{\mathcal{S}}_\alpha \times_{\mathcal{V}} \overline{\mathcal{S}}$ et $v_{\overline{\mathcal{T}}'_\alpha} := v_{\overline{\mathcal{S}}'_\alpha} \times 1_{\overline{\mathcal{S}}} : \overline{\mathcal{T}}''_\alpha = \overline{\mathcal{S}}''_\alpha \times_{\mathcal{V}} \overline{\mathcal{S}} \to \overline{\mathcal{T}}'_\alpha = \overline{\mathcal{S}}'_\alpha \times_{\mathcal{V}} \overline{\mathcal{S}}$; de (2.1.3) on déduit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & & & \overline{\mathcal{T}}_\alpha \\
S_\alpha \arrow[r] & \mathcal{T}_\alpha \arrow[urr, hook, "j_{\overline{\mathcal{T}}_\alpha}"] \arrow[r, hook, "j_{\overline{\mathcal{T}}''_\alpha}"] \arrow[drr, hook, "j_{\overline{\mathcal{T}}'_\alpha}"'] & \overline{\mathcal{T}}''_\alpha \arrow[ur, "v_{\overline{\mathcal{T}}_\alpha}"] \arrow[dr, "v_{\overline{\mathcal{T}}'_\alpha}"] & \\
 & & & \overline{\mathcal{T}}'_\alpha
\end{tikzcd}$$

où les j sont des immersions ouvertes et $S_\alpha \to \mathcal{T}_\alpha$ une immersion.

On a un diagramme commutatif dont les carrés verticaux sont cartésiens, de même que le carré horizontal 1 en bas à droite

(2.1.9) $$\begin{tikzcd}
 & X^{(q/S_\alpha)} \arrow[rr, hook] \arrow[dd, dotted, "f^{(q)}_\alpha"] & & \tilde{X}'_\alpha \arrow[rr] \arrow[dd, dotted, "\tilde{f}'_\alpha"] & & \overline{\mathcal{Y}}'_\alpha \arrow[dd, "\overline{h}'_\alpha"] \\
X^{(q/S_\alpha)} \arrow[ur, equal, "\mathrm{id}"] \arrow[rr, hook] \arrow[dd, "f^{(q)}_\alpha"'] & & \tilde{X}''_\alpha \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd, "\tilde{f}''_\alpha"'] & & \overline{\mathcal{Y}}''_\alpha \arrow[ur] \arrow[dd, "\overline{h}''_\alpha"'] & \\
 & S_\alpha \arrow[rr, hook, dotted, "j_{\tilde{S}'_\alpha}"] & & \tilde{S}'_\alpha \arrow[rr, hook, dotted, "i_{\tilde{S}'_\alpha}"] & & \overline{\mathcal{T}}'_\alpha \\
S_\alpha \arrow[ur, equal, dashed, "\mathrm{id}"] \arrow[rr, hook, "j_{\tilde{S}''_\alpha}"'] & & \tilde{S}''_\alpha \arrow[ur, dotted] \arrow[rr, hook, "i_{\tilde{S}''_\alpha}"'] \arrow[urr, phantom, "1"] & & \overline{\mathcal{T}}''_\alpha \arrow[ur, "v_{\overline{\mathcal{T}}'_\alpha}"'] &
\end{tikzcd}$$

D'après [Et 7, (3.4.4)] ou [Et 5, chap II, (3.4.4)], $v^*_{\overline{\mathcal{T}'}_\alpha K}$ induit un isomorphisme

(2.1.10) $$R^i f^{(q)}_{\alpha\ \mathrm{rig}^*}(X_\alpha^{(q/S_\alpha)}/\overline{\mathcal{T}}'_\alpha, \pi^*_{X_\alpha}\ j^*_{X_\alpha}E) \tilde{\to} R^i f^{(q)}_{\alpha\ \mathrm{rig}^*}(X^{(q/S_\alpha)}/\overline{\mathcal{T}}''_\alpha, \pi^*_{X_\alpha}\ j^*_{X_\alpha}E) :$$

en effet on peut appliquer [loc.cit.] car le morphisme propre $v_{\overline{\mathcal{T}'}_\alpha}$, étant étale au voisinage de S_α, il induit [B 3, (1.3.5)] un isomorphisme entre un voisinage strict de $]S_\alpha[_{\overline{\mathcal{T}}''_\alpha}$ dans $\overline{\mathcal{T}}''_{\alpha K}$ et un voisinage strict de $]S_\alpha[_{\overline{\mathcal{T}}'_\alpha}$ dans $\overline{\mathcal{T}}'_{\alpha K}$. Notons $\overline{T}''_\alpha$ la réduction de $\overline{\mathcal{T}}''_\alpha$ mod $\mathfrak{m}$, $v_{\overline{T}_\alpha}$ la réduction de $v_{\overline{\mathcal{T}}_\alpha}$ mod $\mathfrak{m}$ et $\tilde{S}'''_\alpha$ l'adhérence schématique de S_α dans $\overline{T''}_\alpha$; on a un diagramme commutatif où les carrés 1 et 2 sont cartésiens

(2.1.11)
$$\begin{tikzcd}
 & & \tilde{S}''_\alpha \arrow[ddr, hook, "i''"] & & \\
 & \tilde{S}'''_\alpha \arrow[ur, hook, "i'"] \arrow[dr, hook, "i'''"] & & & \\
 & & v^{-1}_{\overline{T}_\alpha}(\tilde{S}_\alpha) \arrow[r, hook] \arrow[d, "v_{\tilde{S}_\alpha}"] \arrow[dr, phantom, "1"] & \overline{T}''_\alpha \arrow[r, hook] \arrow[d, "v_{\overline{T}_\alpha}"] \arrow[dr, phantom, "2"] & \overline{\mathcal{T}}''_\alpha \arrow[d, "v_{\overline{\mathcal{T}}_\alpha}"] \\
S_\alpha \arrow[uuur, hook, "j_{\tilde{S}'''_\alpha}"] \arrow[rr, hook, "j_{\tilde{S}_\alpha}"'] & & \tilde{S}_\alpha \arrow[r, hook, "i_{\overline{T}_\alpha}"'] & \overline{T}_\alpha \arrow[r, hook] & \overline{\mathcal{T}}_\alpha
\end{tikzcd}$$

où les j (resp. les i) sont des immersions ouvertes (resp. fermées). Posons $v_\alpha = v_{\tilde{S}_\alpha} \circ i'''$.

Soit $\tilde{f}'''_\alpha : \tilde{X}'''_\alpha \to \tilde{S}'''_\alpha$ l'image inverse de $\tilde{f}''_\alpha : \tilde{X}''_\alpha \to \tilde{S}''_\alpha$ par $i' : \tilde{S}'''_\alpha \hookrightarrow \tilde{S}''_\alpha$. On a un diagramme commutatif

(2.1.12)
$$\begin{tikzcd}
X^{(q/S_\alpha)} \arrow[r, hook] \arrow[d, "f^{(q)}_\alpha"'] & \tilde{X}'''_\alpha \arrow[r, hook] \arrow[d, "\tilde{f}'''_\alpha"] & \overline{\mathcal{Y}''}_\alpha \arrow[d, "\overline{h}''_\alpha"] \\
S_\alpha \arrow[r, hook, "j_{\tilde{S}'''_\alpha}"] \arrow[d, equal] & \tilde{S}'''_\alpha \arrow[r, hook, "i_{\tilde{S}'''_\alpha}"] \arrow[d, "i_{\mathcal{T}}"] & \overline{\mathcal{T}''_\alpha} \arrow[d, "v_{\overline{\mathcal{T}''_\alpha}}"] \\
S_\alpha \arrow[r, hook, "j_{\tilde{S}_\alpha}"] & \tilde{S}_\alpha \arrow[r, hook, "i_{\tilde{S}_\alpha}"] & \overline{\mathcal{T}_\alpha}
\end{tikzcd}$$

où les j (resp. les i) sont des immersions ouvertes (resp. fermées). Comme $v_{\overline{\mathcal{T}}_\alpha}$ est étale au voisinage de S_α et que v_α est propre on déduit de [B 3, théo (1.3.5)] que $v_{\overline{\mathcal{T}}_{\alpha K}}$ induit un isomorphisme entre un voisinage strict de $]S_\alpha[_{\overline{\mathcal{T}}''_\alpha}$ dans $]\tilde{S}'''_\alpha[_{\overline{\mathcal{T}}''_\alpha}$ et un voisinage strict de $]S_\alpha[_{\overline{\mathcal{T}}_\alpha}$ dans $]\tilde{S}_\alpha[_{\overline{\mathcal{T}}_\alpha}$. Par suite [Et 7, théo (3.4.4)] $v_{\overline{\mathcal{T}}_{\alpha K}}$ induit un isomorphisme

(2.1.13) $R^i f^{(q)}_{\alpha \ \mathrm{rig}^*}(X_\alpha^{(q/S_\alpha)}/\overline{\mathcal{T}''}_\alpha, \pi^*_{X_\alpha}\ j^*_{X_\alpha}E) \tilde{\to} R^i f^{(q)}_{\alpha \ \mathrm{rig}^*}(X^{(q/S_\alpha)}/\overline{\mathcal{T}}_\alpha, \pi^*_{X_\alpha}\ j^*_{X_\alpha}E).$

Par composition des isomorphismes (2.1.8), (2.1.10) et (2.1.13) on obtient un isomorphisme induit par $\pi_{X_\alpha} : X_\alpha^{(q/S_\alpha)} \to X_\alpha$

$$(2.1.14)\qquad \begin{tikzcd} F^*_{S_\alpha}\, R^i\, f_{\alpha \mathrm{rig}^*}(X_\alpha/\overline{\mathcal{T}_\alpha}; j^*_{X_\alpha}\, E) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\simeq"] & R^i\, f^{(q)}_{\alpha \mathrm{rig}^*}(X^{(q/S_\alpha}/\overline{\mathcal{T}}_\alpha; \pi^*_{X_\alpha} j^*_{X_\alpha} E) \\ F^*_{\overline{\mathcal{T}}'_{\alpha K}} R^i f_{\alpha \mathrm{rig}^*}(X_\alpha/\overline{\mathcal{T}_\alpha}; j^*_{X_\alpha} E). & \end{tikzcd}$$

Si l'on prend l'image inverse de cet isomorphisme par $j_{\overline{\mathcal{T}}'_\alpha} : \mathcal{T}_\alpha \to \overline{\mathcal{T}}'_\alpha$, on voit aisément en suivant les diagrammes précédents que l'on obtient l'isomorphisme en cohomologie convergente, induit par π_{X_α} :

$$(2.1.15)\qquad F^*_{S_\alpha} R^i f_{\alpha \ \mathrm{conv}^*}(X_\alpha/\mathcal{T}_\alpha, j^*_{X_\alpha}\mathcal{E}) \tilde{\to} R^i f^{(q)}_{\alpha \ \mathrm{conv}^*}(X^{(q/S_\alpha)}/\mathcal{T}_\alpha, \pi^*_{X_\alpha}\ j^*_{X_\alpha}\mathcal{E})$$

où l'on a, comme pour (2.1.5), un isomorphisme

$$(2.1.16)\qquad j^*_{S_\alpha} R^i f_{\mathrm{conv}^*}(X/\mathcal{S}, \mathcal{E}) \tilde{\to} R^i f_{\alpha \ \mathrm{conv}^*}(X_\alpha/\mathcal{T}_\alpha, j^*_{X_\alpha}\mathcal{E}).$$

Si $F_{\tilde{S}_\alpha}$ désigne le Frobenius (puissance q) de $\tilde{S}_\alpha$, on notera $\tilde{X}_\alpha^{(q/\tilde{S}_\alpha)}$ le produit fibré défini par le diagramme à carré cartésien

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}_\alpha \arrow[r, "F_{\tilde{X}_\alpha/\tilde{S}_\alpha}"] \arrow[rr, bend left=60, "F_{\tilde{X}_\alpha}"] \arrow[dr, "\tilde{f}_\alpha"'] & \tilde{X}_\alpha^{(q/\tilde{S}_\alpha)} \arrow[r, "\pi_{\tilde{X}_\alpha}"] \arrow[d, "\tilde{f}_\alpha^{(q)}"] & \tilde{X}_\alpha \arrow[d, "\tilde{f}_\alpha"] \\ & \tilde{S}_\alpha \arrow[r, "F_{\tilde{S}_\alpha}"'] \arrow[d, hook, "i_{\tilde{S}_\alpha}"'] & \tilde{S}_\alpha \\ & \overline{\mathcal{T}}_\alpha & . \end{tikzcd}$$

Le calcul de $R^i f^{(q)}_{\alpha \ \mathrm{rig}^*}(X^{(q/S_\alpha)}/\overline{\mathcal{T}}_\alpha, \pi^*_{X_\alpha}\ j^*_{X_\alpha}E)$ étant indépendant de la compactification de $X^{(q/S_\alpha)}$ choisie [B 5, (3.1.11), (3.1.12), (3.2.3)], nous choisirons dorénavant $\tilde{X}_\alpha^{(q/\tilde{S}_\alpha)}$ [C-T, § 10] comme compactification de $X^{(q/s_\alpha)}$ au lieu de $\tilde{X}'''_\alpha$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
X_\alpha \arrow[r, "F_{X_\alpha/S_\alpha}"] \arrow[d, hook, "j_{\tilde{X}_\alpha}"'] & X_\alpha^{(q/S_\alpha)} \arrow[d] \\
\tilde{X}_\alpha \arrow[r, "F_{\tilde{X}_\alpha/\tilde{S}_\alpha}"] \arrow[d, "i_{\tilde{S}_\alpha}\circ\tilde{f}_\alpha"'] & \tilde{X}_\alpha^{(q/\tilde{S}_\alpha)} \arrow[d, "i_{\tilde{S}_\alpha}\circ\tilde{f}_\alpha^{(q)}"] \\
\overline{\mathcal{T}}_\alpha \arrow[r, equal] & \overline{\mathcal{T}}_\alpha;
\end{tikzcd}$$

F_{X_α/S_α} définit par fonctorialité [B 5, (3.1.11) (ii), (3.1.12) (i)] ou [C-T, (10.5.2)] un morphisme

(2.1.17)

$$\begin{tikzcd}
F^*_{X_\alpha/S_\alpha} : R^i f^{(q)}_{\alpha\ \mathrm{rig}^*}(X^{(q/S_\alpha)}/\overline{\mathcal{T}}_\alpha; \pi^*_{X_\alpha}\ j^*_{X_\alpha}E) \arrow[r] & R^i f_{\alpha\ \mathrm{rig}^*}(X_\alpha/\overline{\mathcal{T}}_\alpha; F^*_{X_\alpha/S_\alpha}\pi^*_{X_\alpha} j^*_{X_\alpha}E) \arrow[d, "\simeq"] \\
R^i f_{\alpha\ \mathrm{rig}^*}(X_\alpha/\overline{\mathcal{T}}_\alpha; j^*_{X_\alpha}F^*_X E) \arrow[r, "\simeq"] & R^i f_{\alpha\ \mathrm{rig}^*}(X_\alpha/\overline{\mathcal{T}}_\alpha; F^*_{X_\alpha}\ j^*_{X_\alpha}E).
\end{tikzcd}$$

Par image inverse par $j_{\overline{\mathcal{T}}_\alpha} : \mathcal{T}_\alpha \hookrightarrow \overline{\mathcal{T}}_\alpha$ il fournit le morphisme en cohomologie convergente, induit par F_{X_α/S_α}

(2.1.18) $F^*_{X_\alpha/S_\alpha} : R^i f^{(q)}_{\alpha\ \mathrm{conv}^*}(X^{(q/S_\alpha)}/\mathcal{T}_\alpha, \pi^*_{X_\alpha}\ j^*_{X_\alpha}\mathcal{E}) \to R^i f_{\alpha\ \mathrm{conv}^*}(X_\alpha/\mathcal{T}_\alpha, F^*_{X_\alpha}\ j^*_{X_\alpha}\mathcal{E}).$

Enfin, l'isomorphisme de Frobenius de $E, \phi_E : F^*_X \tilde{\to} E$, fournit par fonctorialité un isomorphisme

(2.1.19) $$R^i f_{\alpha\ \mathrm{rig}^*}(X_\alpha/\overline{\mathcal{T}}_\alpha, j^*_{X_\alpha}F^*_X E) \tilde{\to} R^i f_{\alpha\ \mathrm{rig}^*}(X_\alpha/\overline{\mathcal{T}}_\alpha, j^*_{X_\alpha}\mathcal{E}),$$

dont l'image inverse par $j_{\overline{\mathcal{T}}_\alpha} : \mathcal{T}_\alpha \to \overline{\mathcal{T}}_\alpha$ est l'isomorphisme induit en cohomologie convergente par $\phi_{\mathcal{E}} : F^*_X\ \mathcal{E} \tilde{\to} \mathcal{E}$,

(2.1.20) $$R^i f_{\alpha\ \mathrm{conv}^*}(X_\alpha/\mathcal{T}_\alpha, j^*_{X_\alpha}F^*_X\mathcal{E}) \tilde{\to} R^i f_{\alpha\ \mathrm{conv}^*}(X_\alpha/\mathcal{T}_\alpha, j^*_{X_\alpha}\mathcal{E}).$$

En composant les morphismes (2.1.14), (2.1.17) et (2.1.19) [resp. (2.1.15), (2.1.18) et (2.1.20)] on obtient le morphisme de Frobenius souhaité

(2.1.21) $$\phi_{E_{\alpha_i}} : F^*_{S_\alpha} R^i f_{\alpha\ \mathrm{rig}^*}(X_\alpha/\overline{\mathcal{T}}_\alpha, j^*_{X_\alpha}E) \ \to\ R^i f_{\alpha\ \mathrm{rig}^*}(X_\alpha/\overline{\mathcal{T}}_\alpha,\ j^*_{X_\alpha}E)$$

[resp.

$$\phi_{\mathcal{E}_{\alpha_i}} : F^*_{S_\alpha} R^i f_{\alpha\ \mathrm{conv}^*}(X_\alpha/\mathcal{T}_\alpha, j^*_{X_\alpha}\mathcal{E}) \ \to\ R^i f_{\alpha\ \mathrm{conv}^*}(X_\alpha/\mathcal{T}_\alpha,\ j^*_{X_\alpha}\mathcal{E}) \tag{2.1.22}$$

qui est l'image inverse de $\phi_{E_{\alpha_i}}$ par $j_{\overline{\mathcal{T}}_\alpha}$].

D'après [Et 8, théo (3.3.1)] ou [Et 5, chap III, théo (3.3.1)] $\phi_{\mathcal{E}_{\alpha_i}}$ est un isomorphisme : nous allons en déduire que $\phi_{E_{\alpha_i}}$ est un isomorphisme, ce qui achèvera la preuve du théorème.

On a un diagramme commutatif

(2.1.23)
$$\begin{tikzcd}
 & \tilde{S}_\alpha \arrow[d, "i_{\overline{T}_\alpha}"] \arrow[dr, hook, "i_{\tilde{S}_\alpha}"] \arrow[dd, bend right, "v"'] & \\
S_\alpha \arrow[ur, hook, "j_{\tilde{S}_\alpha}"] \arrow[dr, hook, "j_{\overline{S}_\alpha}"'] & \overline{T}_\alpha \arrow[r, hook, "i_{\overline{T}_\alpha}"'] \arrow[d, "\overline{u}'_\alpha"] & \overline{\mathcal{T}}_\alpha \arrow[d, "\overline{u}_\alpha"] \\
 & \overline{S}_\alpha \arrow[r, hook, "i_{\overline{S}_\alpha}"'] & \overline{\mathcal{S}}_\alpha
\end{tikzcd}$$

où $j_{\overline{S}_\alpha}$ (resp. $\overline{u}'_\alpha$) est la réduction mod $\mathfrak{m}$ de $j_{\overline{\mathcal{S}}_\alpha} : \mathcal{S}_\alpha \hookrightarrow \overline{\mathcal{S}}_\alpha$ (resp. de $\overline{u_\alpha} : \overline{\mathcal{T}_\alpha} \to \overline{\mathcal{S}_\alpha}$) : les j (resp. les i) sont des immersions ouvertes (resp. fermées).

De même le triangle commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{T}_\alpha = \mathcal{S}_\alpha \times_{\mathcal{V}} \mathcal{S} \arrow[d, "u_\alpha"] \\
\mathcal{S}_\alpha \arrow[ur, hook, "\Delta"] \arrow[r, equal, "\mathrm{id}"'] & \mathcal{S}_\alpha
\end{tikzcd}$$

où Δ est le morphisme diagonal et u_α la projection (u_α est lisse), fournit un triangle commutatif

(2.1.24)
$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{T}_\alpha \arrow[d, "u_\alpha"] \\
S_\alpha \arrow[ur, hook, "i'"] \arrow[r, hook, "i"'] & \mathcal{S}_\alpha
\end{tikzcd}$$

où i et i' sont des immersions fermées.
D'après [B 3, (2.3.1)] le foncteur $u^*_{\alpha_K}$ induit une auto-équivalence de la catégorie F^a-Isoc(S_α/K) : en composant un foncteur quasi-inverse canonique à u^*_K (cf. [B 5, (3.1.10)]) avec l'équivalence de catégories de [Et 8, cor (1.2.3)] ou [Et 5, chap III, cor (1.2.3)] on constate que la donnée de l'isomorphisme $\phi_{\mathcal{E}_{\alpha_i}}$ correspond à la donnée d'un isomorphisme

$$\phi_{\mathcal{M}} : \mathcal{M}^\sigma \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}$$

de $\hat{A}_K$-modules projectifs de type fini commutant aux connexions.

De même, d'après [B 3, (2.3.5)] le morphisme propre v de (2.1.23) induit l'auto-équivalence $v^* = \overline{u}^*_{\alpha_k}$ de $\mathrm{Isoc}^\dagger(S_\alpha/K)$: en composant un foncteur quasi-inverse à v^* avec l'équivalence de catégories de [B 3, (2 ;5 ;2) (ii)], on constate que la donnée du morphisme $\phi_{E_{\alpha_i}}$ correspond à la donnée d'un morphisme

$$\phi_M : M^\sigma \longrightarrow M$$

de $A^\dagger_K$-modules projectifs de type fini commutant aux connexions.

Ce qui précède peut être formalisé par un diagramme commutatif de foncteurs entre catégories

(2.1.25)
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Conn}^\dagger(A^\dagger_K) \arrow[d, "\mathcal{G}"] & \mathrm{Isoc}^\dagger(S_\alpha/K) \arrow[l, "\Gamma(\overline{\mathcal{S}}_{\alpha_K}{,}-)"', "\simeq"] \arrow[r, "\overline{u}^*_{\alpha_K}", "\simeq"'] \arrow[d, "j^*_{\overline{\mathcal{S}}_{\alpha K}}"] & \mathrm{Isoc}^\dagger(S_\alpha/K) \arrow[d, "j^*_{\overline{\mathcal{T}}_{\alpha K}}"] \\
\mathrm{Conn}^\wedge(\hat{A}_K) & \mathrm{Isoc}(S_\alpha/K) \arrow[l, "\Gamma(\mathcal{S}_{\alpha_K}{,}-)"', "\simeq"] \arrow[r, "u^*_{\alpha_K}", "\simeq"'] & \mathrm{Isoc}(S_\alpha/K)
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont les foncteurs d'oubli et les flèches horizontales des équivalences de catégories : pour les notations et résultats cf. [Et 8, (1.1) et prop (1.2.1)] ou [Et 5, chap III, (1.1) et prop. (1.2.1)]. Ainsi on a un carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}(\phi_M) : \mathcal{G}(M)^\sigma \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathcal{G}(M) \arrow[d, "\simeq"] \\
\phi_{\mathcal{M}} : \mathcal{M}^\sigma \arrow[r, "\sim"] & \mathcal{M} \ ,
\end{tikzcd}$$

donc $\mathcal{G}(\phi_M)$ est un isomorphisme : par fidèle platitude de $\hat{A}_K$ sur $A^\dagger_K$ on en déduit que ϕ_M est un isomorphisme. Par suite $\phi_{E_{\alpha_i}}$ est un isomorphisme. $\square$

Remarque (2.2).
(i) En fait on a prouvé, plus précisément, que le morphisme (2.1.17) induit par F_{X_α/S_α} est un isomorphisme.
(ii) Pour construire le morphisme de Frobenius ϕ_{E_i} nous n'avons pas supposé l'existence d'un relèvement à $\overline{\mathcal{S}}$ du Frobenius de $\overline{S}$, contrairement à [C-T, 12.2].

3. Cas propre et lisse

Théorème (3.1). *Soient S un k-schéma lisse et séparé et $f : X \to S$ un k-morphisme projectif et lisse satisfaisant aux propriétés de [Et 7, (3.4.8.2), ou (3.4.8.6), ou (3.4.9)] (cf [Et 5, chap II, (3.4.8.2), ou (3.4.8.6), ou (3.4.9)]). Alors*

(3.1.1) *Pour tout entier $i \geqslant 0$, on a un diagramme commutatif de foncteurs naturels induits par f et définis dans [Et 7, (3.4.8.5)] ou [Et 5, chap II, (3.4.8.5)]*

$$\begin{array}{ccc} F^a\text{-}Isoc^\dagger(X/K) & \xrightarrow{R^i f_{rig*}} & F^a\text{-}Isoc^\dagger(S/K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F^a\text{-}Isoc(X/K) & \xrightarrow{R^i f_{conv*}} & F^a\text{-}Isoc(S/K) \end{array}$$

où les flèches verticales sont les foncteurs d'oubli.

(3.1.2) *Le foncteur $R^i f_{rig^*}$ précédent est compatible aux changements de base entre k-schémas lisses et séparés (en particulier il commute aux passages aux fibres en les points fermés de S), c'est-à-dire : pour tout carré cartésien*

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{g'} & X \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ S' & \xrightarrow[g]{} & S \end{array}$$

où S' est un k-schéma lisse et séparé et $E \in F^a$-$Isoc^\dagger(X/K)$ on a un isomorphisme de changement de base

$$g^* R^i f_{\mathrm{rig}^*}(E) \xrightarrow{\sim} R^i f'_{\mathrm{rig}^*}(g'^*(E))$$

compatible aux connexions et aux Frobenius.

Démonstration.
Pour (3.1.1). Vu la définition locale sur S de $R^i f_{\mathrm{rig}^*}$ [cf [Et 7, (3.4.8.5)])

on peut supposer S affine lisse et connexe et se ramener au cas de [Et 7, (3.4.8.2)] : alors f est relevable comme dans le théorème (2.1) ci-dessus qu'il suffit d'appliquer, d'où la conclusion.

Pour (3.1.2). Soient $V = Spec\ A_0 \overset{j_{U_0}}{\hookrightarrow} S$ un ouvert affine de S et $Y = Spec\ B_0 \underset{j'_{Y_0}}{\hookrightarrow} S'$ un ouvert affine de $V' = S' \times_S V$; on note $\psi_{VY} : Y \to V$, le morphisme induit par g. Soient $A = \mathcal{V}[t_1, ..., t_n]/(f_1, ...f_r)$ une $\mathcal{V}$-algèbre lisse relevant A_0, $U = Spec\ A$ et $\overline{U}$ la fermeture projective de U dans $\mathbb{P}^n_{\mathcal{V}}$, $\mathcal{S}$ et $\overline{\mathcal{S}}$ leurs complétés formels respectifs, $j_{\overline{\mathcal{S}}}$ l'immersion ouverte $\mathcal{S} \hookrightarrow \overline{\mathcal{S}}$, et posons $X_V = X \times_S V$, et $\overline{V} = \overline{U}$ mod.π. Si V (resp. Y) parcourt un recouvrement ouvert affine de S (resp. de V') alors Y parcourt un recouvrement ouvert affine de S' ; or la donnée de $R^i f_{\mathrm{rig}^*}(E)$ (resp. de $g^* R^i f_{\mathrm{rig}^*}(E)$) équivaut à la donnée des $j_V^* R^i f_{\mathrm{rig}^*}(E)$ (resp. des $j_Y'^* g^* R^i f_{\mathrm{rig}^*}(E)$), donc la donnée de $g^* R^i f_{\mathrm{rig}^*}(E)$ équivaut à celle des

$$\psi_{VY}^*\ j_V^*\ R^i f_{\mathrm{rig}^*}(E) = \psi_{VY}^*\ R^i f_{\mathrm{rig}^*}(X_V/\overline{\mathcal{S}}, E_{X_V}).$$

Puisque $\psi := \psi_{VY}$ est de type fini on peut choisir une présentation $B_0 = A_0[x_1, ..., x_d]/(g_1, ..., g_s)$ de B_0 sur A_0 : notons $\mathcal{Y}$ (resp. $\overline{\mathcal{Y}}$) le complété formel de $\mathbb{A}^d_U$ (resp. de $\mathbb{P}^d_{\overline{U}}$), $\overline{Y}$ l'adhérence schématique de Y dans $\mathbb{P}^d_{\overline{U}}$, $\overline{\psi} : \overline{Y} \to \overline{V}$ le morphisme canonique et $j_{\overline{\mathcal{Y}}} : \mathcal{Y} \hookrightarrow \overline{\mathcal{Y}}$, $j_{\overline{Y}} : Y \hookrightarrow \overline{Y}$ les immersions ouvertes ; $\theta : \mathcal{Y} \to \mathcal{S}$, $\overline{\theta} : \overline{\mathcal{Y}} \to \overline{\mathcal{S}}$ désignerons les projections canoniques. D'où un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & \overline{Y} \arrow[rr, hook] \arrow[dd, dotted, "\overline{\psi}"] & & \overline{\mathcal{Y}} \arrow[dd, "\overline{\theta}"] \\
Y \arrow[ur, hook] \arrow[rr, hook] \arrow[dd, "\psi"'] & & \mathcal{Y} \arrow[ur, hook, "j_{\overline{\mathcal{Y}}}"'] \arrow[dd] & \\
 & \overline{V} \arrow[rr, dotted, "\theta"] & & \overline{\mathcal{S}} \\
V \arrow[ur, hook, dotted] \arrow[rr, hook] & & \mathcal{S} \arrow[ur, hook, "j_{\overline{\mathcal{S}}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Ainsi [B 3, (2.3.2) (iv)]

$$\psi^* R^i f_{\mathrm{rig}^*}(X_V/\overline{\mathcal{S}}, E_{X_V}) = \overline{\theta}^* R^i f_{\mathrm{rig}^*}(X_V/\overline{\mathcal{S}}, E_{X_V})$$

et $\quad j_{\overline{\mathcal{Y}}}^*\ \overline{\theta}^* R^i f_{\mathrm{rig}^*}(X_V/\overline{\mathcal{S}}, E_{X_V})$

$$= \theta^* j^*_{\overline{\mathcal{S}}}\, R^i f_{\mathrm{rig}^*}(X_V/\overline{\mathcal{S}}, E_{X_V})$$

$$= \theta^* R^i f_{\mathrm{conv}^*}(X_V/S, \hat{E}_{X_V}) \text{ [Et 7, (3.4.4)] ou [Et 5, chap II, (3.4.4)]}$$

$$= \psi^* R^i f_{\mathrm{conv}^*}(X_V/S, \hat{E}_{X_V}) = \psi^*(R^i f_{\mathrm{conv}^*}(\hat{E})_{|V})$$

$$= (g^*(R^i f_{\mathrm{conv}^*}(\hat{E}))_{|Y}$$

où $\hat{E}$ est l'isocristal convergent associé à E.

De même on a

$$j^*_{\overline{\mathcal{Y}}}\, j'^*_Y\ R^i f'_{\mathrm{rig}^*}(g'^*(E)) \simeq R^i f'_{\mathrm{conv}^*}(X'_Y/\mathcal{Y}, g'^*(\hat{E})_{X'_Y})$$

$$\simeq (R^i f'_{\mathrm{conv}^*}(g'^*(\hat{E})))_{|Y}\ .$$

Or le théorème [Et 8, (3.2.1)] ou [Et 5, chap III, (3.2.1)] fournit un isomorphisme de changement de base

$$g^* R^i f_{\mathrm{conv}^*}(\hat{E}) \xrightarrow{\sim} R^i f'_{\mathrm{conv}^*}(g'^*(\hat{E}))\ ;$$

donc par le théorème de pleine fidélité pour les F-isocristaux de Kedlaya [Ked 2, theo 1.1] on en déduit un isomorphisme

$$g^* R^i f_{\mathrm{rig}^*}(E) \xrightarrow{\sim} R^i f'_{\mathrm{rig}^*} g'^*(E)$$

compatible aux connexions et aux Frobenius. □

Théorème (3.2). *Soient* $S = \coprod_{\alpha=1}^{n} S_\alpha$ *un* k*-schéma lisse et séparé, décomposé en la somme de ses composantes connexes, et* $f : X \to S$ *un* k*-morphisme propre et lisse vérifiant la propriété* $\mathcal{P}$ *suivante :*

$$\mathcal{P} \begin{cases} \textit{Il existe un ouvert dense } U \subset X \textit{quasi-projectif sur } S \textit{ tel que} \\ \textit{pour tout } \alpha \in [[1,n]] \textit{ on ait } S_\alpha \backslash f(X\backslash U) \neq \phi. \end{cases}$$

Alors

(3.2.1) *La propriété* ($\mathcal{P}$) *équivaut à dire que* f *est génériquement projective, i.e. qu'il existe un ouvert dense* $V \subset S$ *tel que l'application* $f_V : X_V = X_{X_S} V \to V$ *induite par* f *soit projective et lisse.*

(3.2.2) *Supposons k parfait, $e \leqslant p-1$ et que le f_V de (3.2.1) satisfait aux hypothèses de [Et 7, (3.4.8.2), ou (3.4.8.6), ou (3.4.9)]. Si $E \in$ F^a-$\mathrm{Isoc}^\dagger(X/K)_{\mathrm{plat}}$ a pour image $\mathcal{E} \in F^a$-$\mathrm{Isoc}(X/K)$, alors :*
(i) $\mathcal{E}^i = R^i f_{\mathrm{conv}^*}(\mathcal{E}) \in F^a$-$\mathrm{Isoc}(S/K)$,
(ii) *Il existe $E^i \in F^a$-$Isoc^\dagger(S/K)$, unique à isomorphisme près, tel que $\mathcal{E}^i$ soit l'image de E^i par le foncteur d'oubli*

$$F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(S/K) \longrightarrow F^a\text{-}\mathrm{Isoc}(S/K)$$

$$E^i \longmapsto \widehat{E^i} = \mathcal{E}^i.$$

Démonstration.
Prouvons (3.2.1). Si f est génériquement projective et lisse on prouve facilement qu'elle vérifie $(\mathcal{P})$.

Réciproquement supposons que f vérifie $(\mathcal{P})$.

Par le lemme de Chow précis de Gruson-Raynaud [R-G, I, cor 5.7.14] il existe un éclatement U-admissible $g : X' \to X$, avec X' quasi-projectif sur S : en particulier g induit un isomorphisme

$$g_U : U' = g^{-1}(U) \xrightarrow{\sim} U \ .$$

De plus, comme f et g sont propres, le morphisme composé $f \circ g : X' \to X$ est projectif [EGA II, (5.5.3) (ii)]. L'image du fermé $Z := X \backslash U$ par le morphisme propre f est un fermé $f(Z)$ de S et l'ouvert $V = S \backslash f(Z) = \coprod_\alpha (S_\alpha \backslash f(X-U))$ est non vide par hypothèse : comme S_α est connexe et intègre, l'ouvert non vide $V_\alpha := S_\alpha \backslash f(X \backslash U)$ de S_α est dense, donc l'immersion ouverte $j : V \hookrightarrow S$ est dominante. D'autre part l'ouvert $X_V = X \times_S V$ de X ne rencontre pas $f^{-1}(f(Z))$, donc X_V est un ouvert de U : par suite l'isomorphisme g_U induit un isomorphisme

$$g_V : X'_U = g^{-1}(X_V) \xrightarrow{\sim} X_V.$$

Notons $f_V : X_V \to V$ la restriction de f ; le morphisme composé $f_V \circ g_V$, restriction du morphisme projectif $f \circ g$, est lui aussi projectif : ainsi f_V est projectif, d'où (3.2.1).

Prouvons le (3.2.2). Le (i) est mis pour mémoire, car prouvé en [Et 8, (3.3.1)] ou [Et 5, chap III, (3.3.1)]. Pour le (ii) considérons le carré cartésien

$$\begin{tikzcd} X_V \arrow[r, hook, "j'"] \arrow[d, "f_V"'] & X \arrow[d, "f"] \\ V \arrow[r, hook, "j"] & S; \end{tikzcd}$$

on a un isomorphisme de changement de base en cohomologie convergente [Et 8, (3.3.1)]

$$j^* R^i f_{\mathrm{conv}^*}(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} R^i f_{V\mathrm{conv}^*}(j'^*(\mathcal{E})) =: \mathcal{E}_V^i, \tag{3.2.2.1}$$

où $\mathcal{E}$ désigne l'image de E par le foncteur d'oubli F^a-Isoc$^\dagger(X/K) \to F^a$-Isoc(X/K), $E \mapsto \hat{E} = \mathcal{E}$.
Pour la suite de la démonstration on peut supposer S connexe, intègre : quitte à restreindre V on peut supposer V affine, lisse et connexe, $V = Spec\ A_0$. On utilise alors les notations introduites dans la démonstration du théorème (3.1) : $j_{\overline{\mathcal{S}}} : \mathcal{S} = Spf\ \hat{A} \hookrightarrow \overline{\mathcal{S}}$. De plus f_V se relève en un morphisme projectif et lisse $h : \mathcal{X} \to \mathcal{S}$ s'insérant dans un carré cartésien de $\mathcal{V}$-schémas formels

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, hook] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "\overline{h}"] \\ \mathcal{S} \arrow[r, hook, "j_{\overline{\mathcal{S}}}"'] & \overline{\mathcal{S}} \end{tikzcd}$$

où $\overline{h}$ est projectif [Et 6, théo (3.2.1)] ou [Et 5, chap I, théo (3 ;3)]. En notant $E_V^i = R^i f_{V\mathrm{rig}^*}(X_V/\overline{\mathcal{S}}, j'^*(E))$, le théorème (3.1) prouve que $E_V^i \in F^a$-Isoc$^\dagger(V/K)$. On peut appliquer le [Et 7, (3.4.4)] ou [Et 5, chap II, (3.4.4)] qui fournit un isomorphisme

$$\widehat{E_V^i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_V^i \tag{3.2.2.2}$$

compatible aux Frobenius. Par le théorème 2 de [Et 4], les isomorphismes (3.2.2.1) et (3.2.2.2) assurent l'existence de $E^i \in F^a$-Isoc$^\dagger(S/K)$ tel que

$$\mathcal{E}^i = \widehat{E^i} \qquad \text{et} \qquad E_V^i = j^*(E^i).$$

L'unicité de E^i à isomorphisme près provient de la pleine fidélité du foncteur d'oubli F^a-Isoc$^\dagger(S/K) \to F^a$-Isoc(S/K) établi par Kedlaya [Ked 2, theo 1.1]. D'où le théorème. $\square$

4. Cas fini étale

Théorème (4.1). *Soient S un k-schéma lisse et séparé et $f : X \to S$ un k-morphisme fini étale. Alors, pour tout entier $i \geqslant 0$, f induit des foncteurs canoniques*

$$R^i f_{\mathrm{rig}*} : \mathrm{Isoc}^\dagger(X/K) \longrightarrow \mathrm{Isoc}^\dagger(S/K)$$

$$R^i f_{\mathrm{rig}*} : F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(X/K) \longrightarrow F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(S/K)$$

et $$R^i f_{rig*}(E) = 0 \text{ pour tout } i \geqslant 1.$$

Démonstration. Soient $S_0 = Spec\ A_0 \hookrightarrow S$ un ouvert affine et A_1, A_2 deux $\mathcal{V}$-algèbres lisses relevant A_0. On pose $S_1 = Spec\ A_1$, $S_2 = Spec\ A_2$; par la méthode du [Et 6, théo (3.1.1)] ou [Et 5, chap I, théo (3.1)] on a des compactifications $\overline{S}_1 := P_1$, $\overline{S}_2 := P_2$ de S_1 et S_2 et on note $\overline{S}_0$ l'adhérence schématique de S_0 plongé diagonalement dans $\overline{S}_1 \times_{\mathcal{V}} \overline{S}_2$. En désignant par f_0 la restriction de f à $X_0 = f^{-1}(S_0)$ et par $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\overline{\mathcal{S}_1}$, $\overline{\mathcal{S}_2}$ les complétés formels de S_1, S_2, $\overline{S}_1$, $\overline{S}_2$ respectivement, le théorème (3.1.1) de [Et 6] fournit des carrés cartésiens, $i = 1, 2$,

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X}_i \arrow[r] \arrow[d, "h_i"'] & \overline{\mathcal{X}_i} \arrow[d, "\overline{h}_i"] \\
\mathcal{S}_i \arrow[r, hook] & \overline{\mathcal{S}_i}
\end{tikzcd}$$

où $\overline{h}_i$ est fini, h_i est fini étale et rélève f_0 ; d'où deux cubes commutatifs $(i = 1, 2)$

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{X}_i \arrow[rr, hook] \arrow[dd, dotted, "h_i"] & & \overline{\mathcal{X}}_i \arrow[dd, "\overline{h}_i"] \\
\mathcal{X}_1 \times_{\mathcal{V}} \mathcal{X}_2 \arrow[ur, "u_{\mathcal{X}_i}"] \arrow[rr, hook] \arrow[dd, "h_1 \times h_2"'] & & \overline{\mathcal{X}}_1 \times_{\mathcal{V}} \overline{\mathcal{X}}_2 \arrow[ur, "u_{\overline{\mathcal{X}}_i}"'] \arrow[dd, "\overline{h}_1 \times \overline{h}_2"] & \\
& \mathcal{S}_i \arrow[rr, dotted] & & \overline{\mathcal{S}}_i \\
\mathcal{S}_1 \times_{\mathcal{V}} \mathcal{S}_2 \arrow[ur, dotted, "u_{\mathcal{S}_i}"'] \arrow[rr] & & \overline{\mathcal{S}}_1 \times_{\mathcal{V}} \overline{\mathcal{S}}_2 \arrow[ur, "u_{\overline{\mathcal{S}}_i}"'] &
\end{tikzcd} .$$

Par le théorème [Et 7, (3.4.1)] ou [Et 5, chap II, (3.4.1)] on sait que pour $E \in \mathrm{Isoc}^\dagger(X/K)$ et E_0 sa restriction à X_0, alors $R^i f_{0\mathrm{rig}^*}(X_0/\overline{\mathcal{S}_1}, E_0)$ et $R^i f_{0\mathrm{rig}^*}(X_0/\overline{\mathcal{S}_2}, E_0)$ sont éléments de $\mathrm{Isoc}^\dagger(S_0/K)$: de plus ils sont nuls pour $i \geqslant 1$ car $\overline{h}_1$ et $\overline{h}_2$ sont finis. De plus le théorème [Et 7, (3.4.4)] ou [Et 5, chap II, (3.4.4)] fournit des isomorphismes de changement de base

$$u^*_{\overline{\mathcal{S}}_i} : f_{0\mathrm{rig}*}(X_0/\overline{\mathcal{S}_i}, E_0) \xrightarrow{\sim} f_{0\mathrm{rig}*}(X_0/\overline{\mathcal{S}_1} \times_{\mathcal{V}} \overline{\mathcal{S}_2}, u^*_{\overline{\mathcal{X}}_i} E_0);$$

d'où un isomorphisme

$$f_{0\mathrm{rig}*}(X_0/\overline{\mathcal{S}_1}, E_0) \xrightarrow{\sim} f_{0\mathrm{rig}*}(X_0/\overline{\mathcal{S}_2}, E_0) \ ,$$

et cet isomorphisme vérifie la condition de cocycles pour trois relèvements S_1, S_2, S_3 de S_0.

Par suite f induit un foncteur

$$f_{\mathrm{rig}^*} : \mathrm{Isoc}^\dagger(X/K) \longrightarrow \mathrm{Isoc}^\dagger(S/K)$$

puisque les constructions se recollent sur les ouverts de S. On pouvait aussi conclure en appliquant [Et 7, (3.4.8)] ou [Et 5, chap II, (3.4.8)].

La construction du Frobenius étant locale, on peut, pour montrer que f_{rig^*} induit un foncteur

$$f_{\mathrm{rig}^*} : F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(X/K) \longrightarrow F^a\text{-}\mathrm{Isoc}^\dagger(S/K),$$

supposer que S est affine et lisse. La construction du théorème (2.1) s'applique; le morphisme (2.1.17) est alors un isomorphisme car $F_{X/S}$ est un isomorphisme puisque f est étale : là on n'a pas besoin d'utiliser les résultats de Ogus via le cas convergent (où l'on avait supposé $e \leqslant p-1$). On en déduit directement que ϕ_{E_i} est un isomorphisme. D'où le théorème. □

Remarque (4.1.1). Tsuzuki a abordé dans [Tsu 1, theo (2.6.3)] la construction de $f_{\mathrm{rig}^*}(X_0/\overline{\mathcal{S}}, -)$ dans le cas fini étale, mais il n'étudie pas l'indépendance par rapport à $\overline{\mathcal{S}}$ et ne prouve pas l'existence d'un $\mathcal{V}$- morphisme fini relevant le f_0 ci-dessus.

Théorème (4.2). *Soient S un k-schéma séparé de type fini, $E \in \mathrm{Isoc}^\dagger(S/K)$ et $f : X \to S$ un k-morphisme fini étale galoisien de groupe G.*

(4.2.1) *Si S est lisse sur k, alors, pour tout entier $i \geqslant 0$, on a des isomorphismes canoniques*

$$H^i_{\mathrm{rig}}(S/K, E) \xrightarrow{\sim} (H^i_{\mathrm{rig}}(S/K, f_{\mathrm{rig}*}f^*E))^G$$

$$\xrightarrow{\sim} (H^i_{\mathrm{rig}}(X/K, f^*E))^G.$$

(4.2.2) *Si k est parfait, ou si S est affine et lisse sur k, alors, pour tout entier $i \geqslant 0$, on a des isomorphismes canoniques*

$$H^i_{\mathrm{rig},c}(S/K, E) \xrightarrow{\sim} (H^i_{\mathrm{rig},c}(S/K, f_{\mathrm{rig}*}f^*E))^G$$

$$\xrightarrow{\sim} (H^i_{\mathrm{rig},c}(X/K, f^*E))^G.$$

(4.2.3) *Si $E \in F^a$-$Isoc^\dagger(S/K)$ alors les isomorphismes de (4.2.1) et (4.2.2) sont compatibles à l'action du Frobenius.*

Démonstration. Par additivité de la cohomologie rigide, avec ou sans supports, on peut supposer, pour le (1) et le (2), que S est connexe.

Pour le (4.2.1), la suite spectrale de Čech en cohomologie rigide nous ramène à S affine et lisse sur k, $S = Spec\ A_0$. On choisit une $\mathcal{V}$-algèbre lisse A relevant A_0 et on reprend les notations utilisées dans la preuve de (3.2.2) : il existe un carré cartésien de $\mathcal{V}$-schémas formels

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, hook] \arrow[d, "h"'] & \overline{\mathcal{X}} \arrow[d, "\overline{h}"] \\ \mathcal{S} \arrow[r, hook] & \overline{\mathcal{S}} \end{tikzcd}$$

et un système fondamental $(V_\lambda)_\lambda = (Spm\ A_\lambda)_\lambda$ de voisinages stricts de $]S[_{\overline{\mathcal{S}}}$ dans $\overline{\mathcal{S}_K}$ et $\lambda_0 > 1$ tel que pour $1 < \lambda \leqslant \lambda_0$ on ait un diagramme à carrés cartésiens

(4.2.1.1)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}_K \arrow[r, hook] \arrow[d, "h_K"'] & W_\lambda \arrow[r, hook] \arrow[d, "h_\lambda"'] & \overline{\mathcal{X}}_K \arrow[d, "\overline{h}_K"] \\ \mathcal{S}_K \arrow[r, hook] & V_\lambda \arrow[r, hook] & \overline{\mathcal{S}}_K \end{tikzcd}$$

avec $\overline{h}_K$ fini, h_K et h_λ finis étales galoisiens de groupe G [Et 7, (2.3.1)(2)] ou [Et 5, chap II, (2.3.1)(2)].

(4.2.1.2) Soit E_λ un $\mathcal{O}_{V_\lambda}$-module localement libre de type fini. Pour $1 < \mu \leqslant \lambda$ on note

$$\alpha_{\lambda_\mu} : V_\mu \hookrightarrow V_\lambda \quad , \quad \alpha_\lambda : V_\lambda \hookrightarrow \overline{\mathcal{S}}_K$$

$$\alpha'_{\lambda_\mu} : W_\mu \hookrightarrow W_\lambda \quad , \quad \alpha'_\lambda : W_\lambda \hookrightarrow \overline{\mathcal{X}}_K,$$

les immersions ouvertes et on pose

$$j_\lambda^\dagger\ E_\lambda = \varinjlim \alpha_{\lambda\mu^*}\ \alpha^*_{\lambda\mu}(E_\lambda),$$

$$j_\lambda'^\dagger\ h_\lambda^*\ E_\lambda = \varinjlim \alpha'_{\lambda\mu^*}\ \alpha'^*_{\lambda\mu}\ h^*_\lambda\ (E_\lambda),$$

$$j^\dagger\ E_\lambda = \alpha_{\lambda^*}\ j_\lambda'^\dagger\ E_\lambda,$$

$$j_\lambda'^\dagger\ h^*_\lambda(E_\lambda) = \alpha'_{\lambda^*}\ j_\lambda'^\dagger\ h^*_\lambda\ (E_\lambda).$$

Lemme (4.2.1.3). *Avec les notations précédentes on a des isomorphismes canoniques*

(i) $(h_{\lambda^*}\ h^*_\lambda(E_\lambda))^G \xrightarrow{\sim} E_\lambda$.
(ii) $(h_{\lambda*}\ h^*_\lambda\ j^\dagger_\lambda\ E_\lambda)^G \xrightarrow{\sim} j^\dagger_\lambda\ E_\lambda$.
(iii) $(\overline{h}_{K*}\ \overline{h}^*_K\ j^\dagger\ E_\lambda)^G \xrightarrow{\sim} j^\dagger\ E_\lambda$.

Démonstration du lemme (4.2.1.3).

(i) Comme E_λ est localement libre de type fini on a un isomorphisme

$$h_{\lambda*}\ h^*_\lambda(E_\lambda) \xrightarrow{\sim} h_{\lambda*}\ h^*_\lambda(\mathcal{O}_{V_\lambda}) \otimes_{\mathcal{O}_{V_\lambda}} E_\lambda,$$

et l'action de G sur le membre de gauche se fait par l'intermédiaire de $h_{\lambda*}\ h^*_\lambda(\mathcal{O}_{V_\lambda})$ puisque G agit trivialement sur E_λ : on est ramené au cas $E = \mathcal{O}_{V_\lambda}$ qui a été prouvé dans la proposition [Et 7, (2.3.1)] ou [Et 5, chap II, (2.3.1)].

(ii) On a des isomorphismes

$$\begin{aligned} h_{\lambda*}\ h^*_\lambda\ j^\dagger_\lambda\ E_\lambda &\simeq h_{\lambda*}\ j_\lambda'^\dagger\ h^*_\lambda\ E_\lambda \text{ [B 3, (2.1.4.7)]} \\ &\simeq j^\dagger_\lambda\ h_{\lambda*}\ h^*_\lambda\ E_\lambda \text{ [Et 7, (3.1.4.1)] ou [Et 5, chap II, (3.1.4.1)]} \\ &\simeq h_{\lambda*}\ h^*_\lambda\ E_\lambda\ \otimes_{\mathcal{O}_{V_\lambda}} j^\dagger_\lambda\ \mathcal{O}_{V_\lambda} \text{ [B 3, (2.1.3)}(ii)]. \end{aligned}$$

L'action de G sur $h_{\lambda*}\ h^*_\lambda\ j^\dagger_\lambda\ E_\lambda$ se fait par l'intermédiaire de $h_{\lambda*}\ h^*_\lambda\ E_\lambda$ puisque G agit trivialement sur $j^\dagger_\lambda(\mathcal{O}_{V_\lambda})$: le (ii) résulte alors du (i).

(iii) La preuve est semblable à celle du (ii) en utilisant cette fois [B 3, (2.1.4.8)] et [Et 7, (3.1.4.2)] ou [Et 5, chap II, (3.1.4.2)]. D'où le lemme. $\square$

Soit $E \in \mathrm{Isoc}^\dagger(S/K)$: on choisit le V_λ comme ci-dessus de sorte qu'il existe un $\mathcal{O}_{V_\lambda}$-module localement libre et cohérent E_λ tel que $j^\dagger E_\lambda$ soit une réalisation de E.

La cohomologie rigide $H^*_{\mathrm{rig}}(S/K; E)$ est, pour $1 < \mu \leqslant \lambda$, la cohomologie des complexes

$$\begin{aligned} R\Gamma(V_\mu;\ j^\dagger_\mu E_\mu \otimes_{\mathcal{O}_{V_\mu}} \Omega^\bullet_{V_\mu/K}) &\xleftarrow{\sim} R\Gamma(V_\lambda;\ j^\dagger_\lambda E_\lambda \otimes_{\mathcal{O}_{V_\lambda}} \Omega^\bullet_{V_\lambda/K}) \\ &\xrightarrow{\sim} M \otimes_{A^\dagger_K} \Omega^\bullet_{A^\dagger_K}\ , \end{aligned} \tag{4.2.1.4}$$

où la première flèche (resp. la deuxième) est un isomorphisme (resp. un quasi-isomorphisme), où $M := \Gamma(V_\lambda; j^\dagger_\lambda\ E_\lambda)$ est un $A^\dagger_K$-module projectif de type fini à connexion intégrable [B 3, (2.5.2)], où $\Omega^1_{V_\lambda/K}$ est localement libre de type fini sur le faisceau cohérent d'anneaux $\mathcal{O}_{V_\lambda}$ [Et 7, (2.3.1)(2)] ou [Et 5, chap II, (2.3.1) (2)] et où $\Omega^1_{A^\dagger_K}$ est un $A^\dagger_K$-module projectif de type fini [Et 4, 1.3].

De même la cohomologie rigide

$$H^*_{\mathrm{rig}}(S/K; f_{\mathrm{rig}*}\ f^*\ E) \qquad (\text{resp.} H^*_{\mathrm{rig}}(X/K; f^*\ E))$$

est la cohomologie des complexes

$$R\Gamma(V_\lambda; h_{\lambda^*}\ h^*_\lambda(j^\dagger_\lambda E_\lambda) \otimes_{\mathcal{O}_{V_\lambda}} \Omega^\bullet_{V_\lambda/K}) \tag{4.2.1.5}$$

[resp. des complexes

$$R\Gamma(W_\lambda; h^*_\lambda(j^\dagger_\lambda E_\lambda) \otimes_{\mathcal{O}_{W_\lambda}} \Omega^\bullet_{W_\lambda/K})\ ]. \tag{4.2.1.6}$$

Or la formule de projection, jointe au fait que h_λ est étale, fournit des isomorphismes

$$\begin{aligned} h_{\lambda^*} h^*_\lambda(j^\dagger_\lambda E_\lambda) \otimes_{\mathcal{O}_{V_\lambda}} \Omega^\bullet_{V_\lambda/K} &\simeq h_{\lambda^*}(h^*_\lambda\ j^\dagger_\lambda E_\lambda \otimes_{\mathcal{O}_{W_\lambda}} h^*_\lambda(\Omega^\bullet_{V_\lambda/K})) \\ &\simeq\ h_{\lambda^*}(h^*_\lambda\ j^\dagger_\lambda E_\lambda \otimes_{\mathcal{O}_{W_\lambda}} \Omega^\bullet_{W_\lambda/K})\ ; \end{aligned} \tag{4.2.1.7}$$

donc les complexes (4.2.1.5) et (4.2.1.6) sont quasi-isomorphes puisque h_λ est fini.

Compte tenu du lemme (4.2.1.3) les isomorphismes

$$\begin{aligned} H^i_{\mathrm{rig}}(S/K;E) &\tilde{\to} H^i_{\mathrm{rig}}(S/K;f_{\mathrm{rig}^*}f^*E)^G \\ &\tilde{\to} H^i_{\mathrm{rig}}(X/K;f^*E)^G \end{aligned}$$

s'établissent comme [Et 1, (3.1.1)].

Pour le (4.2.2), comme la cohomologie rigide ne dépend que du schéma réduit sous-jacent, on supposera S réduit : si k est parfait il existe alors un ouvert dense $U \hookrightarrow S$ avec U affine et lisse sur k et $Z := S \setminus U$ de dimension strictement plus petite que celle de S [Et 2, dém. du théo 3]. De plus $H^j(G, H^i_{\mathrm{rig},c}(S/K, f_{\mathrm{rig}*}\ f^*E)) = 0$ pour $j \geqslant 1$ [S 2, VIII, § 2, cor 1 de prop 4] ; par fonctorialité en E de la cohomologie rigide à supports on en déduit un morphisme de suites exactes longues

$$\begin{tikzcd} \arrow[r] & H^i_{\mathrm{rig},c}(U,E_{|U}) \arrow[r]\arrow[d] & H^i_{\mathrm{rig},c}(S,E) \arrow[r]\arrow[d] & H^i_{\mathrm{rig},c}(Z,E_{|Z}) \arrow[r]\arrow[d] & {} \\ \arrow[r] & (H^i_{\mathrm{rig},c}(U,f_{U\mathrm{rig}*}f_U^*E_{|U}))^G \arrow[r] & (H^i_{\mathrm{rig},c}(S,f_{\mathrm{rig}*}f^*E))^G \arrow[r] & (H^i_{\mathrm{rig},c}(Z,f_{Z\mathrm{rig}*}f_Z^*E_{|Z}))^G \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

Par récurrence sur la dimension on est ramené à montrer l'isomorphisme du (4.2.2) pour S affine et lisse sur k.

Reprenons les notations utilisées pour la démonstration du (4.2.1) et considérons le diagramme commutatif à carrés cartésiens

(4.2.2.1)
$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}_K \arrow[r, hook] \arrow[d, "h_K"'] & W_\lambda \arrow[d, "h_\lambda"'] & W_\lambda \setminus \mathcal{X}_K \arrow[l, hook', "i'_\lambda"'] \arrow[d, "h'_\lambda"] \\ \mathcal{S}_K \arrow[r, hook] & V_\lambda & V_\lambda \setminus \mathcal{S}_K. \arrow[l, hook', "i_\lambda"'] \end{tikzcd}$$

La cohomologie à supports $H^*_{\mathrm{rig},c}(S/K;E)$

$$[\mathrm{resp.} H^*_{\mathrm{rig},c}(S/K;f_{\mathrm{rig}*}\ f^*\ E), \mathrm{resp.} H^*_{\mathrm{rig},c}(X/K;f^*\ E)]$$

est la cohomologie du complexe

$$(4.2.2.2) \qquad R\Gamma(V_\lambda; j_\lambda^\dagger E_\lambda \otimes_{\mathcal{O}_{V_\lambda}} \Omega^\bullet_{V_\lambda/K} \longrightarrow i_{\lambda *} i_\lambda^*(j_\lambda^\dagger E_\lambda \otimes_{\mathcal{O}_{V_\lambda}} \Omega^\bullet_{V_\lambda/K}))$$

[resp.

$$(4.2.2.3)\ R\Gamma(V_\lambda; h_{\lambda *} h_\lambda^*(j_\lambda^\dagger E_\lambda) \otimes_{\mathcal{O}_{V_\lambda}} \Omega^\bullet_{V_\lambda/K} \to i_{\lambda *} i_\lambda^*(h_{\lambda *} h_\lambda^*(j_\lambda^\dagger E_\lambda) \otimes_{\mathcal{O}_{V_\lambda}} \Omega^\bullet_{V_\lambda/K}));$$

resp.

$$(4.2.2.4)\ R\Gamma(W_\lambda; h_\lambda^*(j_\lambda^\dagger E_\lambda \otimes_{\mathcal{O}_{W_\lambda}} \Omega^\bullet_{W_\lambda/K} \to i'_{\lambda *} i'^*_\lambda(h_\lambda^*(j_\lambda^\dagger E_\lambda) \otimes_{\mathcal{O}_{W_\lambda}} \Omega^\bullet_{W_\lambda/K}))].$$

Le théorème de changement de base pour un morphisme propre [Et 7, théo (3.3.2)] ou [Et 5, chap II, théo (3.3.2)] fournit des isomorphismes

$$i_{\lambda *} i_\lambda^*(h_{\lambda *} h_\lambda^*(j_\lambda^\dagger E_\lambda) \otimes_{\mathcal{O}_{V_\lambda}} \Omega^\bullet_{V_\lambda}) \simeq i_{\lambda *} i_\lambda^* h_{\lambda *}(h_\lambda^*(j_\lambda^\dagger E_\lambda) \otimes_{\mathcal{O}_{W_\lambda}} \Omega^\bullet_{W_\lambda})$$

$$\simeq i_{\lambda *} h'_{\lambda *} i'^*_\lambda(h_\lambda^* j_\lambda^\dagger E_\lambda \otimes \Omega^\bullet_{W_\lambda}) \simeq h_{\lambda *} i'_{\lambda *} i'^*_\lambda(h_\lambda^* j_\lambda^\dagger E_\lambda \otimes_{\mathcal{O}_{W_\lambda}} \Omega^\bullet_{W_\lambda})\ ;$$

donc via (4.2.1.7) les complexes (4.2.2.3) et (4.2.2.4) sont quasi-isomorphes puisque h_λ est fini. L'isomorphisme (4.2.2) du théorème (4.2) en résulte, compte tenu de (4.2.1.3) (ii).

Pour le (4.2.3), on peut supposer S connexe affine et lisse sur $\mathcal{V}$ comme ci-dessus, dont on reprend les notations ainsi que celles de [Et 7, (2.3.1)(2)] (cf [Et 5, chap II, (2.3.1) (2)]). On fixe un relèvement $F_{A^\dagger} : A^\dagger \to A^\dagger$

$$[\text{resp.} F_{B^\dagger} : B^\dagger \xrightarrow[1_{B^\dagger} \otimes F_{A^\dagger}]{} B^\dagger \otimes A^\dagger \xrightarrow[F_{B^\dagger/A^\dagger}]{\sim} B^\dagger]$$

du Frobenius de A_0 [resp. de B_0] comme dans [Et 5, (1.2)] : par extension des scalaires on en déduit $F_{\hat{A}_K} : \hat{A}_K \to \hat{A}_K$ et $F_{\hat{B}_K} : \hat{B}_K \to \hat{B}_K$. On a vu en (1.2.4) qu'on dispose de carrés cartésiens où $F_{\lambda\mu}$ et $F'_{\lambda\mu}$ sont finis :

$$(4.2.3.1) \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{S}_K = Spm\ (\hat{A}_K) \arrow[r, hook] \arrow[d, "F_{\mathcal{S}_K} = Sp\ F_{\hat{A}_K}"'] & V_\mu = Spm(A_\mu) \arrow[d, "F_{\lambda\mu}"] \\ \mathcal{S}_K = Spm\ (\hat{A}_K) \arrow[r, hook] & V_\lambda = Spm(A_\lambda) \end{tikzcd}$$

et

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{X}_K = Spm\ (\hat{B}_K) \arrow[r, hook] \arrow[d, "F_{\mathcal{X}_K} = Sp\ F_{\hat{B}_K}"'] & W_\mu = Spm(B_\mu) \arrow[d, "F'_{\lambda\mu}"] \\
\mathcal{X}_K = Spm\ (\hat{B}_K) \arrow[r, hook] & V_\mu = Spm(B_\lambda)\ ;
\end{tikzcd}
\tag{4.2.3.2}
$$

plus précisément, étant donné λ on trouve μ de la façon suivante : en fixant des générateurs $\{x_i\}$ de B_λ sur A_λ comme dans la preuve de [Et 7, (2.3.1) (2)], les éléments $F_{\hat{B}_K}(x_i)$ sont entiers sur $A_\lambda \subset A_K^\dagger$, donc a fortiori sur $B_K^\dagger = \varinjlim_n B_{\lambda'}$: il existe donc μ, $1 < \mu \leqslant \lambda$ tel que pour tout i on ait $F_{\hat{B}_K}(x_i) \in B_\mu$. Comme dans la preuve de [Et 7, (2.3.1) (2)] on peut aussi supposer que pour tout i et tout $g \in G$ on a $g_{\hat{B}_K}(x_i) \in B_\mu$. Ainsi $F'_{\lambda\mu} : W_\mu \to W_\lambda$ (resp. $g_\lambda : W_\lambda \to W_\lambda$ est induit par $F_{B^\dagger} : B^\dagger \to B^\dagger$ (resp. $g_{B^\dagger} : B^\dagger \to B^\dagger$) ; pour prouver le lemme suivant :

Lemme (4.2.3.3).

$$g_\lambda \circ F'_{\lambda\mu} = F'_{\lambda\mu} \circ g_\mu.$$

il suffit de prouver le

Lemme (4.2.3.4).

$$g_{B^\dagger} \circ F_{B^\dagger} = F_{B^\dagger} \circ g_{B^\dagger}.$$

Or $g \in G$ induit un morphisme $g_X : X \to X$ tel que $g_X \circ F_X = F_X \circ g_X$, puisque $g(x^q) = g(x)^q$ pour toute section x de O_X ; d'où un diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
X & X^{(q/S)} \arrow[l, "\pi_X"'] & X \arrow[l, "F_{X/S}"', "\sim"] \arrow[ll, bend right, "F_X"'] \\
X \arrow[u, "g_X"] \arrow[ur, phantom, "1"] & X^{(q/S)} \arrow[l, "\pi_X"] \arrow[u, "g_X^{(q)}"] \arrow[ur, phantom, "2"] & X \arrow[l, "\sim", "F_{X/S}"'] \arrow[u, "g_X"']
\end{tikzcd}
\tag{4.2.3.5}
$$

Le carré commutatif 1 se relève en le carré commutatif

$$
\begin{tikzcd}
B^\dagger \arrow[r, "1_{B^\dagger}\otimes F_{A^\dagger}"] \arrow[d, "g_{B^\dagger}"'] & B^\dagger \otimes A^\dagger \arrow[d, "g_{B^\dagger}\otimes 1_{A^\dagger}"] \\
B^\dagger \arrow[r, "1_{B^\dagger}\otimes F_{A^\dagger}"'] & B^\dagger \otimes A^\dagger .
\end{tikzcd}
\tag{4.2.3.6}
$$

Par l'équivalence de catégories $B^\dagger \longmapsto B_0$ de la catégorie des $A^\dagger$-algèbres finies étales dans la catégorie des A_0-algèbres finies étales [Et 3, théo 7], on relève le carré commutatif 2 en le carré commutatif

$$
\begin{tikzcd}
B^\dagger \otimes A^\dagger \arrow[r, "F_{B^\dagger/A^\dagger}", "\sim"'] \arrow[d, "g_{B^\dagger}\otimes 1_{A^\dagger}"'] & B^\dagger \arrow[d, "g_{B^\dagger}"] \\
B^\dagger \otimes A^\dagger \arrow[r, "\sim", "F_{B^\dagger/A^\dagger}"'] & B^\dagger
\end{tikzcd} .
\tag{4.2.3.7}
$$

Par composition on a prouvé (4.2.3.4), donc (4.2.3.3).

Compte tenu de la commutation (4.2.3.3) et de la définition de la cohomologie rigide (resp. de la cohomologie rigide à supports compacts) donnée en (4.2.1.4), (4.2.1.5), (4.2.1.6) [resp. en (4.2.2.2), (4.2.2.3), (4.2.2.4)] les isomorphismes (4.2.1) et (4.2.2) du théorème (4.2) sont compatibles à l'action du Frobenius. □

Dans la preuve du théorème (4.2) on a montré au passage :

Lemme (4.3). *Si S est un k-schéma séparé de type fini, $f : X \longrightarrow S$ est fini étale (non nécessairement galoisien) et $E \in Isoc^\dagger(X/K)$ on a des isomorphismes canoniques*

(1) $H^i_{\mathrm{rig}}(X/K;E) \xrightarrow{\sim} H^i_{\mathrm{rig}}(S/K; f_{\mathrm{rig}*}\, E)$.

(2) $H^i_{\mathrm{rig},c}(X/K;E) \xrightarrow{\sim} H^i_{\mathrm{rig},c}(S/K; f_{\mathrm{rig}*}\, E)$.

(3) *Si de plus $E \in F^a\text{-}Isoc^\dagger(X/K)$ les isomorphismes du (1) et (2) commutent à l'action de Frobenius.*

Remarques (4.4).

(i) Les résultats du lemme (4.3) sont donnés par Tsuzuki dans [Tsu 1, cor (2.6.5) et (2.6.6)], sans précisions de démonstration, notamment pour le (2) du lemme : nous y avons utilisé le théorème de changement de base pour un morphisme propre [Et 7, (3.3.2)] ou [Et 5, chap II, (3.3.2)], qui n'est pas mentionné par Tsuzuki.

(ii) Le (4.2.2) du théorème (4.2) est une étape essentielle pour établir la finiture de la cohomologie rigide à supports compacts à coefficients dans un F-isocristal surconvergent unité à partir de la finitude de la cohomologie cristalline via la suite exacte longue de localisation en cohomologie rigide, la preuve de cet isomorphisme crucial n'apparaît pas dans la démonstration du théorème 6.1.2 de [Tsu 1].

5. Cas plongeable

5.1. On suppose donné un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "j_{\mathcal{Y}}"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{Y} \arrow[d, "\overline{h}"] & \\ S \arrow[r, hook, "j_{\mathcal{T}}"'] & \mathcal{T} \arrow[r, "\rho"'] & Spf\ \mathcal{V} \end{tikzcd}$$

dans lequel f est un morphisme de k-schémas séparés de type fini, $\overline{h}$ et ρ sont des morphismes propres de $\mathcal{V}$-schémas formels, $\overline{h}$ (resp. ρ) est lisse sur un voisinage de X dans $\mathcal{Y}$ (resp. un voisinage de S dans $\mathcal{T}$), $j_{\mathcal{Y}}$ et $j_{\mathcal{T}}$ sont des immersions. Désignons par T (resp. Y) l'adhérence schématique de S dans $\mathcal{T}$ (resp. de X dans $\mathcal{Y}$), $\overline{f} : Y \to T$ le morphisme induit par $\overline{h}$, $i_Y : Y \hookrightarrow \mathcal{Y}$ l'immersion fermée, $X_1 := \overline{f}^{-1}(S)$ et $f_1 : X_1 \to S$ le morphisme induit par $\overline{f}$.

On note F_S (resp. F_X) le Frobenius de S (resp. de X) (élévation à la puissance $q = p^a$ sur le faisceau structural) ; d'où le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "F_{X/S}"] \arrow[drr, bend left, "F_X"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \\ & X^{(q)} \arrow[r, "\pi_{X/S}"] \arrow[d, "f^{(q)}"] & X \arrow[d, "f"] \\ & S \arrow[r, "F_S"'] & S \end{tikzcd}\quad .$$

Théorème (5.2).

(5.2.1) Sous les hypothèses (5.1) supposons que $\overline{h}^{-1}(S) = \overline{f}^{-1}(S) = X$ *; alors, pour tout entier* $i \geqslant 0$*, le morphisme* f *induit un foncteur*

$$R^i f_{\mathrm{rig}*}(X/\mathcal{T}, -) : F^a\text{-Isoc}^\dagger(X/K) \longrightarrow F^a\text{-Isoc}^\dagger(S/K).$$

(5.2.2) Supposons donnés des morphismes

$$S' \xhookrightarrow{j'} \mathcal{T}' \xhookrightarrow{\rho'} Spf\mathcal{V}$$

où ρ' *est un morphisme propre de* $\mathcal{V}$*-schémas formels,* S' *est un* k*-schéma séparé de type fini,* j' *est une immersion et* ρ' *est lisse sur un voisinage de* S' *dans* $\mathcal{T}'$*. Alors le foncteur de (5.2.1) commute à tout changement de base séparé de type fini* $S' \to S$ *: en particulier ce foncteur commute aux passages aux fibres en les points fermés de* S*.*

Démonstration.
Pour (5.2.1), soit $(E, \phi) \in F^a\text{-Isoc}^\dagger(X/K)$; pour tout entier $i \geqslant 0$, on a d'après [Et 7, (3.4.4)] ou [Et 5, chap II, (3.4.4)] un isomorphisme

$$F_S^* R^i f_{\mathrm{rig}*}(X/\mathcal{T}, E) \xrightarrow{\sim} R^i f^{(q)}_{\mathrm{rig}*}(X^{(q)}/\mathcal{T}, \pi^*_{X/S}(E)).$$

L'identité de S induit un morphisme

$$\begin{array}{rcl}\theta^i : R^i f^{(q)}_{\mathrm{rig}*}(X^{(q)}/\mathcal{T}, \pi^*_{X/S}(E)) & \longrightarrow & R^i f_{\mathrm{rig}*}(X/\mathcal{T}, F^*_{X/S}\pi^*_{X/S}(E)) \\ & & \Vert \\ & & R^i f_{\mathrm{rig}*}(X/\mathcal{T}, F^*_X(E)),\end{array}$$

et le Frobenius ϕ de E induit un isomorphisme

$$R^i f_{\mathrm{rig}*}(X/\mathcal{T}, F^*_X E) \xrightarrow{\sim} R^i f_{\mathrm{rig}*}(X/\mathcal{T}, E).$$

Par composition de ces trois morphismes on obtient le Frobenius de $R^i f_{\mathrm{rig}*}(X/\mathcal{T}, E)$

$$\phi^i : \ F^*_S R^i f_{\mathrm{rig}*}(X/\mathcal{T}, E) \longrightarrow R^i f_{\mathrm{rig}*}(X/\mathcal{T}, E) \tag{5.2.3}$$

et il s'agit de prouver que ϕ^i est un isomorphisme : pour ça il suffit de prouver que c'est le cas pour θ^i. On sait déjà que θ^i est un morphisme d'isocristaux surconvergents : d'après [B 3, (2.1.11) et (2.2.7)] il suffit de montrer que θ^i induit un isomorphisme dans la catégorie convergente $\mathrm{Isoc}(S/K)$; d'après [B-G-R, 9.4.3/3 et 9.4.2/7] il suffit de le vérifier après passage aux fibres de θ^i en les points fermés s de S. Pour un tel point s notons $\mathcal{V}(s) = W(k(s)) \otimes_W \mathcal{V}$ et

$K(s)$ le corps des fractions de $\mathcal{V}(s)$. D'après [Et 7, (3.4.4)] on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
R^i f^{(q)}_{\mathrm{rig}*}(X^{(q)}/\mathcal{T}, \pi^*_{X/S}(E))_s \arrow[r, "\theta_s"] \arrow[d, "\simeq"] & R^i f_{\mathrm{rig}*}(X/\mathcal{T}, F^*_X(E))_s \arrow[d, "\simeq"'] \\
R^i f^{(q)}_{s\ \mathrm{rig}*}(X^{(q)}_s/\mathcal{V}(s), E_{X^{(q)}_s}) \arrow[r, dotted] \arrow[d, equal] & R^i f_{s\ \mathrm{rig}*}(X_s/\mathcal{V}(s), F^*_{X_s}(E_{X_s})) \arrow[d, equal] \\
H^i_{\mathrm{rig}}(X^{(q)}_s/K(s), E_{X^{(q)}_s}) \arrow[r, dotted] \arrow[d, equal] & H^i_{\mathrm{rig}}(X_s/K(s), F^*_{X_s}(E_{X_s})) \arrow[d, equal] \\
H^i_{\mathrm{rig},c}(X^{(q)}_s/K(s), E_{X^{(q)}_s}) \arrow[r, dotted] & H^i_{\mathrm{rig},c}(X_s/K(s), F^*_{X_s}(E_{X_s}))
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont des isomorphismes ; or la flèche horizontale inférieure est un isomorphisme par [E-LS 1, prop 2.1, où il faut supposer X lisse sur $\mathbb{F}_q$ dans le cas de la cohomologie sans support]. D'où (5.2.1). L'assertion (5.2.2) résulte de [Et 7, (3.4.4)]. □

Références

[B1] P. Berthelot : *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$*, Lecture Notes in Math. 407, Springer (1974).

[B2] P. Berthelot : *Géométrie rigide et cohomologie des variétés algébriques de caractéristique p*, Bulletin de la SMF, mémoire n○ 23, t. 114 / fasc 2, (1986) 7-32.

[B3] P. Berthelot : *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à supports propres*, Prépublication 93-03 de Rennes (1996).

[B4] P. Berthelot : *Finitude et pureté cohomologique en cohomologie rigide*, Invent. Math. 128, (1997) 329-377.

[B5] P. Berthelot : *Cohomologie rigide*, § 3, préprint (14/09/89) non publié.

[B-G-R] S. Bosch, U. Güntzer, R. Remmert : *Non-archimedean analysis*, Grundlehren der Math. Wissenschaften 261, Springer Verlag (1984).

[C-T] B. Chiarellotto, N. Tsuzuki : *Cohomological descent of rigid cohomology for etale coverings*, Rendiconti Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 109, (2003).

[EGA] A. Grothendieck, J. Dieudonné : *Eléments de Géométrie Algébrique* : Chap. I, Springer Grundlehren 166 ; Chap. II, III, IV, Pub. Math. IHES n° 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32.

[Et 1] J.-Y. Etesse : *Rationalité et valeurs de fonctions L en cohomologie cristalline*, Annales Inst. Fourier, t. 38, fasc. 4, (1988), 33-92.

[Et 2] J.-Y. Etesse : *Relèvement de schémas abéliens, F-cristaux et fonctions L*, J. reine angew. Math. 535, (2001), 51-63.

[Et 3] J.-Y. Etesse : *Relèvement de schémas et algèbres de Monsky-Washnitzer : théorèmes d'équivalence et de pleine fidélité*, Rendiconti Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 107, (2002), 111-138.

[Et 4] J.-Y. Etesse : *Descente étale des F-isocristaux surconvergents et rationalité des fonctions L de schémas abéliens*, Annales Scient. Ec. Norm. Sup., 4ème série, t. 35, (2002), 575-603.

[Et 5] J.-Y. Etesse : *Images directes et fonctions L en cohomologie rigide*, hal.00262316/ arXiv :0803.1580.

[Et 6] J.-Y. Etesse : *Relèvement de schémas et algèbres de Monsky-Washnitzer : théorèmes d'équivalence et de pleine fidélité II*, à paraître aux Rendiconti Sem. Mat. Univ. Padova.

[Et 7] J.-Y. Etesse : *Images directes I : Espaces rigides analytiques et images directes*, hal-00425909.

[Et 8] J.-Y. Etesse : *Images directes II : F-isocristaux convergents* , 00425919.

[Et 9] J.-Y. Etesse : *Cohomologie syntomique : liens avec les cohomologies étale et rigide*, preprint.

[Et 10] J.-Y. Etesse : *Fonctions L en cohomologie rigide*, preprint.

[Ked 1] K. Kedlaya : *Finiteness of rigid cohomology with coefficients*, Preprint, arxiv : math.AG/0208027. Duke Math. J. 134 (2006), 15-97.

[Ked 2] K. Kedlaya : *Full faithfullness for overconvergent F-crystals*, in *Geometric Aspects of Dwork Theory*, Vol. II, de Gruyter (2004), 819-835.

[Ked 3] K. Kedlaya : *Semistable reduction for overconvergent F-isocrystals, I : Unipotence and logarithmic extensions*, Preprint, arxiv : math.NT/0405069 v3, 24 Jul 2005. Compositio Math. 143 (2007), 1164-1212.

[R-G] M. Raynaud, L. Gruson : *Critères de platitude et de projectivité*, Invent. Math. 13 (1971), 1-89.

[S 1] J.-P. Serre : *Exemples de variétés projectives en caractéristique p non relevables en caractéristique zéro*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 47 (1961), 108-109 : Oeuvres complètes (Serre), Springer (1986-2000), vol. 2, n° 50, p. 98.

[S 2] J.-P. Serre : *Corps locaux*, Hermann (1968).

[Shi 1] A. Shiho : *Crystalline Fundamental Groups II- Log Convergent Cohomology and Rigid Cohomology*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 9 (2002), 1-163.

[Shi 2] A. Shiho : *Relative Log Convergent Cohomology and Relative Rigid Cohomology I*, arXiv : 0707.1742v1 [math.NT] 12 Jul 2007.

[Shi 3] A. Shiho : *Relative Log Convergent Cohomology and Relative Rigid Cohomology II*, arXiv : 0707.1743v1 [math.NT] 12 Jul 2007.

[Tsu 1] N. Tsuzuki : *On the Gysin isomorphism of rigid geometry*, Hiroshima Math. J. 29 (3), (1999), 479-527.

[Tsu 2] N. Tsuzuki : *Morphisms of F-isocrystals and the finite monodromy theorem for unit-root F-isocrystals*, Duke Math. J. 111 (2002), 385-418.

[Tsu 3] N. Tsuzuki : *Cohomological descent of rigid cohomology for proper coverings*, Invent. Math. 151 (2003), n° 1, 101-133.

[Tsu 4] N. Tsuzuki : *On base change theorem and coherence in rigid cohomology*, Documenta Mathematica, Extra Volume : *Kazuya Kato's Fiftieth Birthday* (2003), 891-918.